

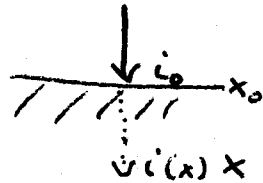
## 7.3. Generation, Recombination + Basic Equations

In diesem Abschnitt werden wir die dominierenden Prozesse zur Absorption von Licht und Rekombination der erzeugten  $e^-$ -Loch-Paare kennenlernen.

### 7.3.1 Absorption von Licht

Da die Abschwächung eines Lichtstrahls durch Materie proportional zur jeweiligen Intensität ist:  $\frac{di}{i} = -\alpha dx$  folgt der bekannte exponentielle Abfall mit der Eindringtiefe  $(x-x_0)$  und dem Absorptionskoeffizienten  $\alpha(\omega)$ , der eine Funktion der Wellenlänge des Lichts ist:

$$i(x) = i(x_0) e^{-\alpha(\omega)[x-x_0]}$$



Die Möglichkeiten zur Absorption unterscheiden sich nun stark zwischen direktem und indirektem Bandlücken Halbleiter:

#### Direct-Band-Gap:

Photonen besitzen recht große Energien ( $E_\omega$ ) im Vergleich zu deren Impulsen. d. Wir sehen dies anhand von der Ruhe Masse der gewöhnlichen Materie ab. Am Ende vom Tag liegen reelle Teilchen schließlich auf der Massenschale  $k^2 = k_0^2 - k^2 = m^2$ . Aber wie bei Photovoltaik?

Impuls:  $\frac{h}{\lambda}$

Da die Photonen im Vergleich zum Gitterimpuls kaum Impuls mitbringen bleibt bei der Absorption des Gitterimpuls erhalten. Wir wissen aus dem Kapitel 3.2, daß nahe der Bandgrenze die Beziehungen

$$E - E_c = \frac{P^2}{2m_e^*} \quad ; \quad E_v - E = \frac{P^2}{2m_h^*} \quad \text{gilt.}$$

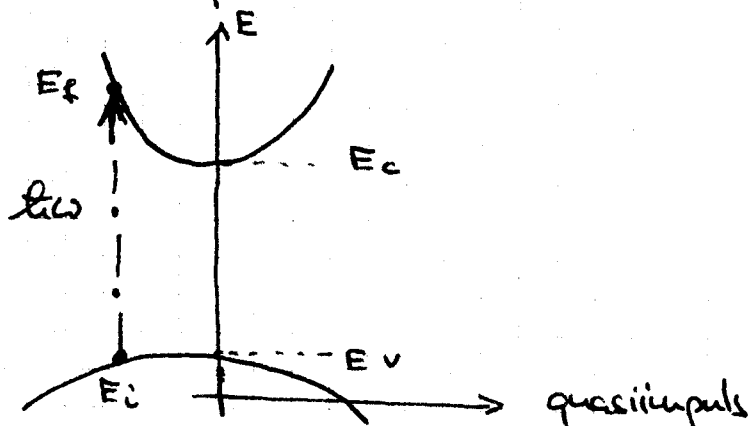
Das  $e^-$  welches ein  $\gamma$  absorbiert ist zunächst im Valenzband:  $(E_i, P)$  und gelangt ins Leitungsband  $(E_f, P)$  wobei  $P_{\text{final}} = P_{\text{initial}} = P$  durch Impulserhaltung ( $R_g \approx 0$ ):

$$\Rightarrow E_f - E_i = \hbar\omega \quad ; \quad E_f - E_c = \frac{P^2}{2m_e^*} \quad ; \quad E_v - E_i = \frac{P^2}{2m_h^*}$$

$$\Rightarrow E_f - E_c + E_v - E_i = \frac{P^2}{2} \left( \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right)$$

$$\Rightarrow \hbar\omega - E_g = \frac{P^2}{2} \left( \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*} \right)$$

D.h. mit steigender Energie des  $\gamma$ 's steigt der Quasiimpuls an:



Die Wahrscheinlichkeit der Absorption hängt nun von der Zustandsdichte im Anfangs und Endzustand ab.

Für gewöhnlich steigt die Zustandsdichte mit der Energie an. Wir wissen, daß nahe der Leitungsbandkante gilt

$$N(E) \propto \sqrt{E - E_c}$$

Die meisten Zustände der  $e^-$ , welche sich noch im Valenzband befinden liegen wiederum nahe der Valenzbandkante (sie ist schließlich die höchste Energie im Valenzband). Daher erwarten wir ein Verhalten gemäß

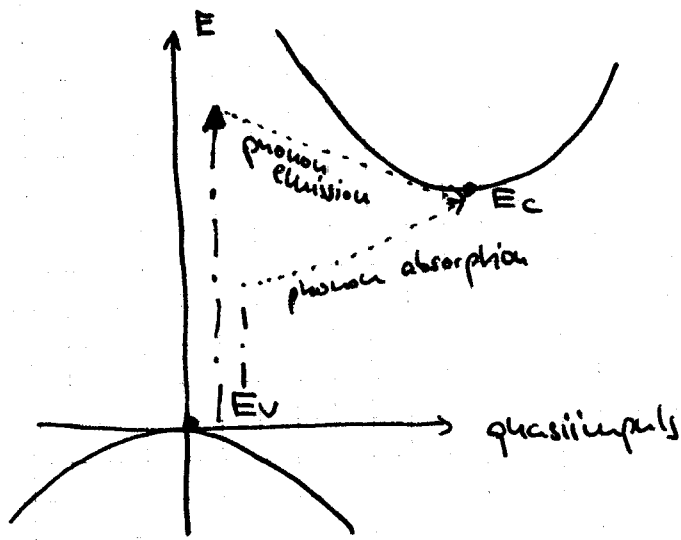
$$\begin{aligned} \alpha(\hbar\omega) &\propto N_{\text{Valenzband}}(E_v) \cdot N(E) \\ &= \text{const} \cdot \sqrt{E - E_c} \\ &= \text{const} \sqrt{E_v + \hbar\omega - E_c} \\ &\equiv A^* \sqrt{\hbar\omega - E_g} \end{aligned}$$

mit der Konstanten  $A^* = 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{cm} \cdot \text{eV}}$

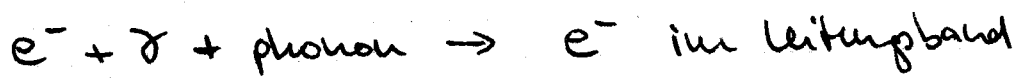
Sehenlicht wird demnach Eindringtiefen im  $[2 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}]^{-1}$  Bereich aufweisen, also  $x \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \text{ cm} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \mu\text{m} = \frac{1}{2} \mu\text{m}$ .

### Indirect-Band-Gap

Wie wir aus Kapitel 3.2 wissen, liegt das Minimum des Leitungsbandes nicht direkt über dem Valenzband für indirect-band-gap Halbleiter wie Silizium:



Somit muß ein  $e^-$  welches ein  $\gamma$  absorbiert noch zusätzlich mit einer Gitteranregung, einem Phonon wechselwirken. Phononen sind Bosonen. Der Prozess sieht also entweder eine Absorption oder Emission eines Phonons vor:



Die Wahrscheinlichkeit des Prozesses ist also proportional zu

$$N_e(E) \cdot N_{\text{phonon}}(E) \cdot f_{\text{phonon}} \text{ für die Absorption, d.h.}$$

da  $f_{\text{phonon}} = \frac{1}{e^{E_p/KT} - 1}$  Bose-Einstein

ist, ergibt sich

absorption eines photon:  $\alpha_a(\hbar\omega, E_p) = \frac{A[\hbar\omega - E_g + E_p]^2}{e^{E_p/KT} - 1}$

emission eines photon:  $\alpha_e(\hbar\omega, E_p) = \frac{A[\hbar\omega - E_g - E_p]^2}{1 - e^{-E_p/KT}}$

Da für  $h\nu > E_g + E_p$  sowohl Emission als auch Absorption möglich sind, ist in dem Fall die GesamtabSORption:

$$\alpha(\lambda) = \alpha_e(\lambda) + \alpha_a(\lambda)$$

In der Literatur gibt es Formeln für  $\alpha(\lambda)$ , die die gemessenen Kurven sehr gut beschreiben.

PPT

Bis zur Wellenlänge  $> 0.4 \mu\text{m}$  sind indirekte Prozesse dominant, darüber, d.h.  $\lambda < 0.4$  gibt es einen starken Beitrag von direkten Übergängen.

### 7.3.2. Rekombination

Nachdem durch Photonen-Absorption  $e^-$  ins Leitungsband gehoben werden, können sie natürlich wieder mit Löchern rekombinieren. Es gibt drei Hauptarten der Rekombination:

#### I. Radiative Rekombination

Ein  $e^-$  kann unter Aussendung eines  $\gamma$ 's in einen Valenzbandzustand zurückfallen. Dieser Prozess ist stark für direct-band-gap Halbleiter und schwächer für indirect-band-gap Halbleiter, da dann hierfür ein Phonon benötigt wird.

Die Gesamtrekombinationsrate für radiative Übergänge ist

$$R_R = B n p$$

mit  $B$  als Materialkonstante,

Im Gleichgewicht ist  $n \cdot p = n_i^2$  und damit die Nettorekombinationsrate:

$$U_R = B(np - n_i^2)$$

Gleich welcher Mechanismus, kann man die Ladungsträgerlebenszeit definieren:

$$\tau_e = \frac{\Delta n}{U}$$

$$\tau_h = \frac{\Delta p}{U}$$

$U$ : Netto Rekombinationsrate  
 $\Delta p, \Delta n$ : Störungen um die Gleichgewichtswerte  $p_0, n_0$

oder aber, da Taylor sagt:  $U = \underbrace{U(n_0, p_0)}_{=0} + \frac{\partial U}{\partial n} \Delta n + \dots$

$$\left[ \Rightarrow \frac{1}{\tau_e} = \left. \frac{dU}{dn} \right|_0 ; \frac{1}{\tau_h} = \left. \frac{dU}{dp} \right|_0 \right]$$

Für die Strahlungsübergänge dieses Abschnitts ergibt sich da  $dp = dn$

$$U = 0 + \frac{\partial U}{\partial n} \Delta n + \frac{\partial U}{\partial p} \Delta p = \Delta n \left( \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial p} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dp} = \left. \frac{dU}{dn} \right|_0 = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_0 + \left. \frac{\partial U}{\partial p} \right|_0 = B(n_0 + p_0)$$

$$\text{und somit } \frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{\tau_h} = B(n_0 + p_0)$$

$$\text{Für Silizium ist } B \approx 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$$

Die Strahlungsrekombination ist in direct-Band-gap wesentlich stärker als in indirect Band-gap.

## II Auger Rekombination

Bei der Auger-Rekombination geht ein  $e^-$  vom Leitungsband in das Valenzband über und gibt die überschüssige Energie an ein  $e^-$  im Valenz oder Leitungsband ab, welches dann Photonen aussendet. Gleichermaßen gibt es den Effekt mit  $1e^-$  und  $2h$ . Die Nettoeffekte sind demnach:

$$U_{\text{Auger}} = B^n n (np - n_i^2)$$

$$U_{\text{Auger}} = B^p p (np - n_i^2)$$

und somit die Lebensdauer mit  $dn = dp$

$$\frac{1}{\tau} = B^n (2n_0p_0 - n_i^2 + n_0^2) = B^n (n_i^2 + n_0^2)$$

$$\text{bzw.: } \frac{1}{\tau} = B^p (2n_0p_0 - n_i^2 + p_0^2) = B^p (n_i^2 + p_0^2)$$

Wegen des jeweils zweiten Terms ist die Auger-Rekombination besonders effektiv in stark dotierten Halbleitern.

Für Silizium gute Qualität ist ab einer Dotierung von  $10^{17} \text{ cm}^{-3}$  die Auger-Rekombination der dominante Effekt.

## III Rekombination durch Fallen

Verunreinigungen und Störstellen führen zu zusätzlichen erlaubten Zuständen in der Bandlücke. Besonders gefährlich sind dabei Zustände nahe der Mitte der Bandlücke.

### 3.3. Grundlegende Gleichungen

Hier listen wir kurz die grundlegenden Gleichungen hier, mit der wir demnächst den n-p Übergang berechnen werden. Es sind dies

#### I. Poisson Gleichung

In 3-D:  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$  und für uns in 1-d:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

mit

$$\rho = q(p - n + N_D^+ - N_A^-)$$

Und wie wir aus Kapitel 3.2 oben gilt in guter Näherung  $N_D^+ \approx N_D$  ;  $N_A^- \approx N_A$

#### II. Stromdichte

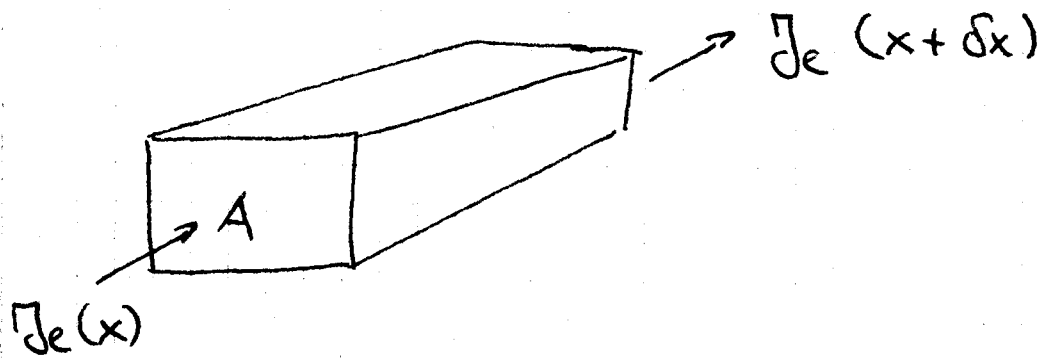
$$J_e = q n e \mu_n \mathcal{E} + q D_n \frac{dn}{dx} \quad ; \quad D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$$

$$J_h = \underbrace{q p e \mu_p \mathcal{E}}_{\text{Beweglichkeit}} - q D_p \underbrace{\frac{dp}{dx}}_{\text{Diffusionskonstante}} \quad ; \quad D_p = \frac{kT}{q} \mu_p$$

#### III. Kontinuitätsgleichung

Der Strom von n-e<sup>-</sup> und Löchern kann sich nur dann ändern, wenn es zu Netto-Erzeugung oder Rekombination kommt.





Rate des einströmenden - ausströmenden  $e^\ominus$  im Leitungsband:

$$= \frac{A}{q} \{ -J_e(x) + J_e(x + \delta x) \} = \frac{A}{q} \frac{dJ_e}{dx} \delta x$$

das muß also gleich sein zur Rate der Rekombination - Erzeugung:

$$= A \delta x \{ U - G \}$$

Wobei  $U$  die Nettorekombinations- und  $G$  die Nettoerzeugungsrate ist.  $G$  beinhaltet z.B. die Erzeugung von  $e^\ominus$  im Leitungsband durch Lichteinfall.

Ist man im Gleichgewicht, muß gelten:

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_e}{dx} = U - G$$

und für Löcher:

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_h}{dx} = -(U - G)$$

Womit wir (Martin Green folgend) die grundsätzlichen Gleichungen gefunden haben, die wir prinzipiell lösen müssen:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{q}{\epsilon} (p - n + N_D - N_A)$$

$$J_e = q n e \mu_n \psi + q D_n \frac{dn}{dx}$$

$$J_{en} = q n e \mu_n \psi - q D_n \frac{dp}{dx}$$

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_e}{dx} = n - p \quad ; \quad \frac{1}{q} \frac{dJ_{en}}{dx} = -(n - p)$$

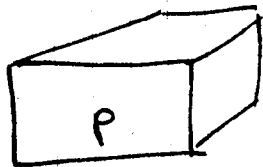
Dabei sind  $n$  und  $p$  Funktionen von  $x$  und  $\psi$  und im Zweifelsfall kompliziert, jedenfalls, wie wir für  $n$  gesehen haben auch mit  $n^2$  etc, d.h. nicht-linearen Anteilen. Mit anderen Worten: Wir haben es mit einem System nicht-linearer, gekoppelter Differentialgleichungen zu tun. Entweder, man löst das nun numerisch, oder aber - weitans mehr erhellend - näherungsweise.

## 7.4.: p-n Übergang Dioden

### 7.4.1 Elektrostatik des p-n Übergangs

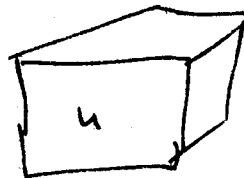
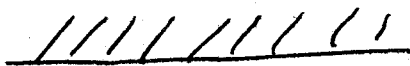
Bringt man ein Stück p und n Halbleiter zusammen, so diffundieren die  $e^-$  aus dem Leitungsband des n-Halbleiters in den p-Halbleiter (und die Löcher von p nach n). Schließlich baut sich ein E-Feld auf, das eine weiteren Diffusion entgegenwirkt.

Diesen Gleichgewichtszustand berechnen wir im Folgenden.



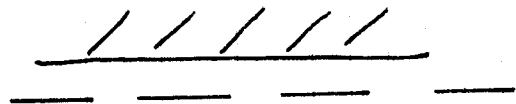
$$p = p_p^0 = N_A$$

$$n = n_p^0 = \frac{n_i^2}{N_A}$$



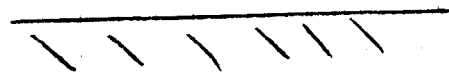
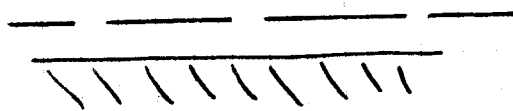
$$n = n_n^0 = N_D$$

$$p = \frac{n_i^2}{N_D} = p_n^0$$



$E_F^n$

$E_F^p$

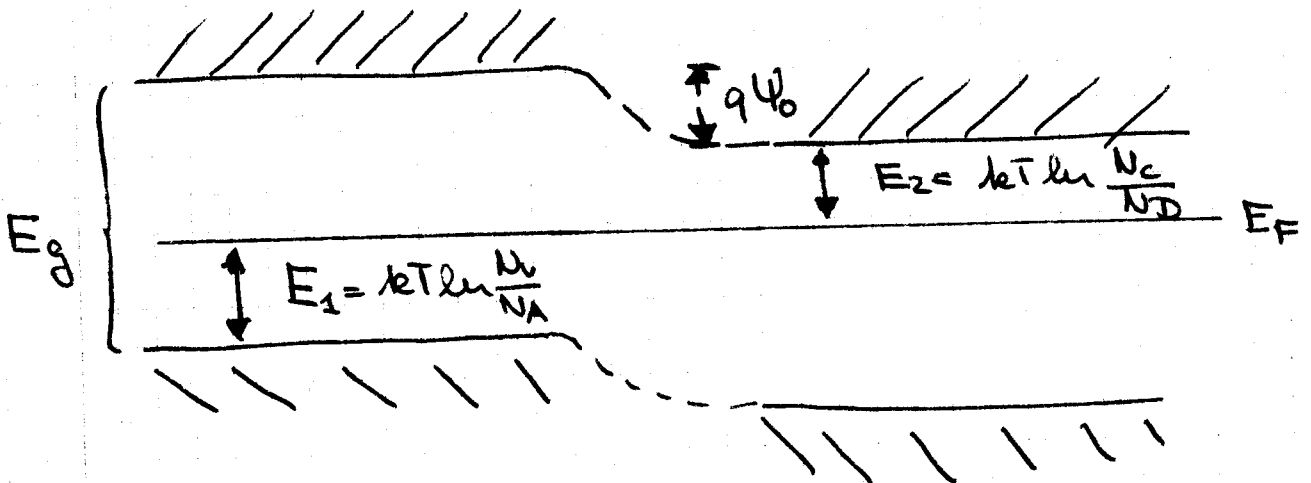
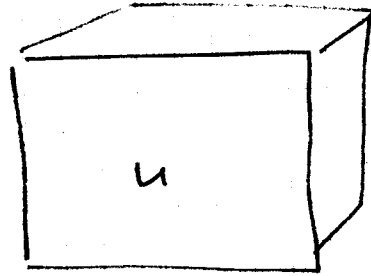
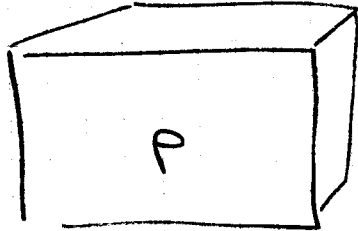


Im thermischen Gleichgewicht gibt es nur ein Fermi-Niveau. Weit weg vom Übergang erwartet man, daß die Verhältnisse sind, wie im ungestörten Zustand. Mit anderen Worten: Es muß einen Potentialänderung nahe des Übergangs geben.

Erinnern wir uns an unsere Ergebnisse aus 7.2,  
als wir die Lage des Fermi-niveaus in p + n Halbleitern  
berechnet haben:

$$n: E_F - E_c = kT \ln \frac{N_D}{N_c} \equiv -E_2$$

$$p: E_v - E_F = kT \ln \frac{N_A}{N_v} \equiv -E_1$$



Somit ist der Potentialspung gleich

$$q\psi_0 = E_g - E_1 - E_2 = E_g - kT \ln \frac{N_c N_v}{N_A N_D}$$

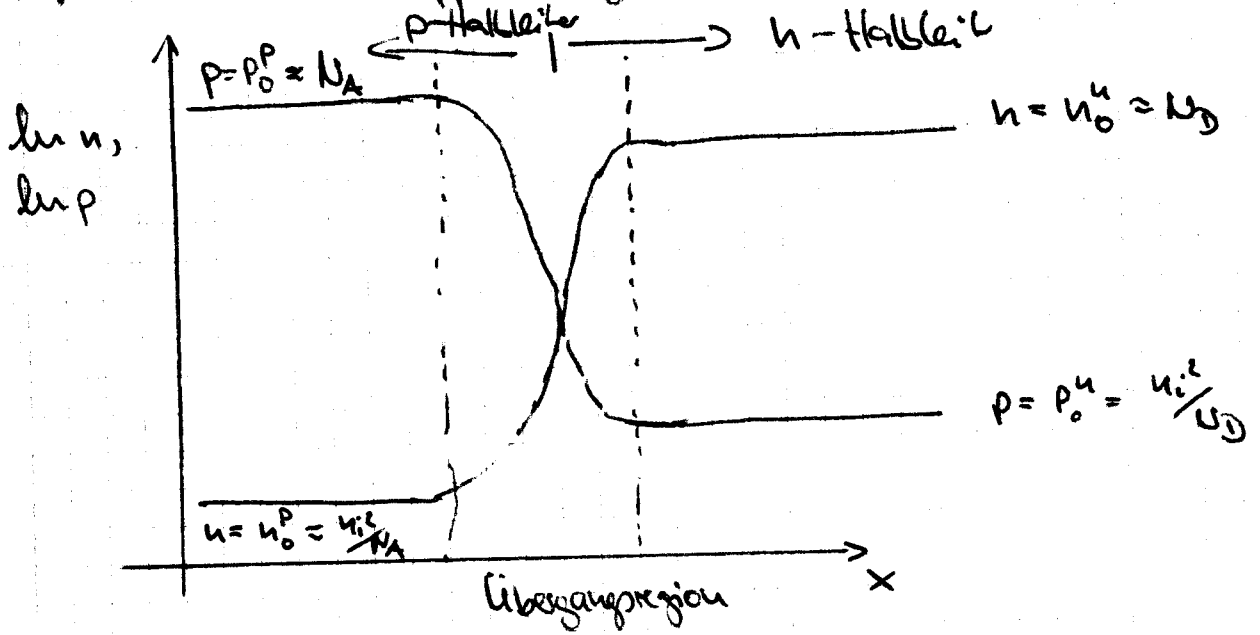
Weitersin wissen wir aus 7.2, daß

$$n_i^2 = n_p = N_c N_v e^{-E_g/kT}$$

$$\Rightarrow \psi_0 = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

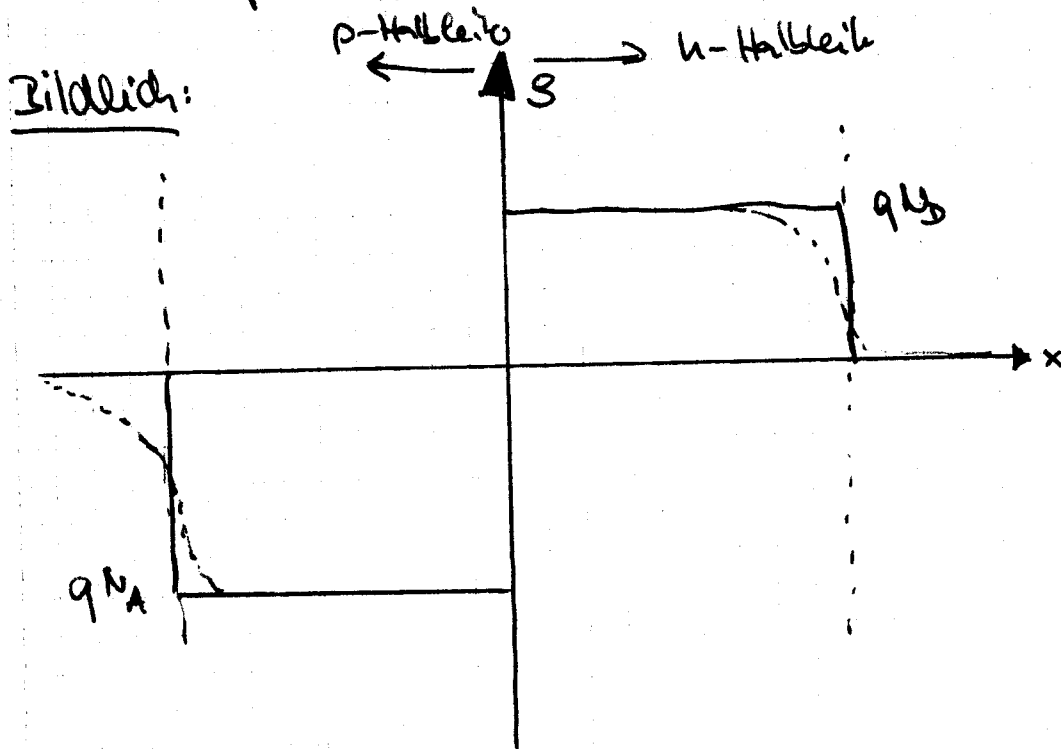
Da die Konzentrationen von n und p, wie wir  
in Kapitel 7.2 gesehen haben exponentiell von

$E_F - E_C$ , bzw.  $E_V - E_F$  abhängt, ist der Übergang recht deutlich. Doppelt logarithmisch dargestellt:



In der Übergangsregion ist somit:

- Auf der n-Halbleiter Seite:  $N_D$  ionisierte Donatoren, aber  $n \ll N_D$   $e^-$  im Leitungsband
- Auf der p-Halbleiter Seite:  $N_A$  ionisierte Akzeptoren, aber  $p \ll N_A$  Löcher in dieser Region



Nochmals zum Verständnis. Weit weg vom Übergang, z. B. auf der n-Halbleitenseite ist  $p \ll n = N_D$  und deswegen  $S < 0$ . Im Übergangsbereich ist  $N_D$  noch immer dasselbe (und  $N_D^+ = N_D$ ). Allerdings wird  $n \ll N_D$  und deswegen

$$S = q \left( \underbrace{p}_{=0} - n + N_D - \underbrace{N_A}_{=0} \right) \approx q N_D$$

Zur Lösung unseres Problems machen wir die Verarmungs-Zonen Näherung: "Die p-n Diode wird in einen neutralen Bereich außerhalb des Übergangs und einen Verarmungs-Zonenbereich des Übergangs eingeteilt, in dem die Beiträge der Raumladung  $S$  von den ionisierten Dotierungen herkommt".

Das macht die Lösung recht einfach:

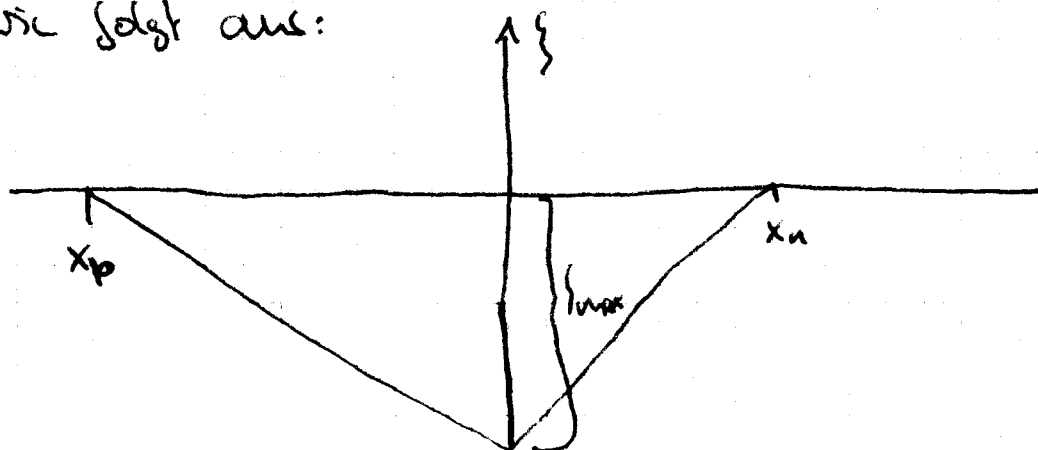
$$\frac{dS}{dx} = \frac{q}{\epsilon}$$

Und da wir uns im Bereich von  $x_p \dots 0$

sowie  $0 \dots x_n$  eine jeweils konstante Ladungsdichte

$S = -qN_A$ , bzw.  $S = qN_D$  haben, sieht das Feld

wie folgt aus:



Die maximale Feldstärke ergibt sich zu:

$$\zeta_{\max} = \zeta(x=0) = \int_{x_p}^0 \frac{d\zeta}{dx} dx = -\frac{q}{\epsilon} N_A (0 - x_p) = \frac{q N_A}{\epsilon} x_p$$

oder auch

$$-\zeta_{\max} = \int_0^{x_n} \frac{q N_D}{\epsilon} dx = \frac{q N_D}{\epsilon} x_n$$

somit aber auch:

$$N_D x_n = N_A x_p$$

Der Potentialsprung (genauer: die Änderung)  $\psi$  ist natürlich

$$\psi = V(\infty) - V(-\infty)$$

$$= V(x_n) - V(x_p) \quad (\text{außerhalb ist } \zeta = 0)$$

$$= \text{Fläche unter } \zeta \text{ Kurve} \quad (\text{da } \frac{dV}{dx} = -\zeta)$$

$$= -\frac{1}{2} (x_n - x_p) \zeta_{\max}$$

$$= -\frac{1}{2} W \zeta_{\max}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\zeta_{\max} = -2\psi/W}}$$

Und die Wellenlänge berechnet man aus

$$\psi = -\frac{1}{2} W \zeta_{\max} = \frac{1}{2} W \frac{q N_D}{\epsilon} x_n = \frac{1}{2} (x_n - x_p) \frac{q N_D}{\epsilon} x_n$$

$$= \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{N_D}{N_A} x_n \right) \frac{q N_D}{\epsilon} x_n = \frac{1}{2} x_n^2 \left[ 1 + \frac{N_D}{N_A} \right] \frac{q N_D}{\epsilon}$$

$$= \frac{1}{2} x_n^2 \frac{q}{\epsilon} N_D^2 \left[ \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right]$$

$$\Rightarrow x_u = \sqrt{24 \frac{\epsilon}{q} \left[ \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right]^{-1}} N_D^{-1}$$

und da  $-x_p = \frac{N_D}{N_A} x_u$  ist

$$W = x_n - x_p = x_u + \frac{N_D}{N_A} x_u = x_u \left[ \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right] N_D$$

$$= \sqrt{24 \frac{\epsilon}{q} \left[ \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right]}$$

und die antilogen Tiefen der Verarmungszonen jeweils

$$x_p = -W \frac{N_D}{N_D + N_A} \quad ; \quad x_n = W \frac{N_A}{N_D + N_A}$$