Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, C. Viermann

Universität Heidelberg
Wintersemester 2016/17

7. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 05.–07.12.2016
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 08.12.2016

P 31 Gruppeneigenschaft der Eichtransformationen (+4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Eichtransformationen der elektromagnetischen Potentiale (mit einer beliebigen Funktion $\chi(\boldsymbol{x}, t)$)

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \chi \tag{2}$$

bezüglich der Hintereinanderausführung eine kommutative Gruppe bilden.

S 32 Magnetfeld rotierender Kugel (5 Punkte)

Eine homogen geladene Kugel vom Radius R mit Gesamtladung Q rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch ihren Mittelpunkt. Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Kugel. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ in großer Entfernung von der Kugel.

S 33 Helmholtz-Spulen: Kraft auf Dipol (6 + 2 Punkte)

In der 1-2-Ebene befinde sich mit Mittelpunkt im Ursprung ein Ring mit Radius R aus Draht von vernachlässigbarem Querschnitt, in dem ein Strom der Stärke I fließt. Parallel dazu sei in der Ebene $x_3 = a$ ein zweiter Draht gleicher Form und Größe angebracht, in dem ebenfalls ein Strom der Stärke I in derselben Richtung fließt.

(a) Berechnen Sie die magnetische Induktion im Punkt $(0, 0, a/2)$ in der Mitte zwischen den Ringen.

(b) Wie groß muss man a wählen, damit das Feld in der Mitte möglichst homogen wird?

(c) Bestimmen Sie die Kraft $\boldsymbol{K}(a)$ auf ein in der Mitte befindliches magnetisches Dipolmoment $\boldsymbol{m} = m\,\boldsymbol{e}_3$ für den Fall, dass die Ringe *gegensinnig* vom Strom durchflossen werden.

(d) (optional, +2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $|\boldsymbol{K}(a)|$ für das in (b) bestimmte a maximal ist.

S 34 Wellengleichungen für das elektromagnetische Feld (4 Punkte)

Leiten Sie direkt aus den Maxwell-Gleichungen (also ohne Verwendung der elektromagnetischen Potentiale) her, dass $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im ladungs- und stromfreien Raum (d. h. für $\rho = 0$ und $\boldsymbol{j} = 0$) Wellengleichungen erfüllen.

S 35 Nützliches zur Lösung der Wellengleichung (5 Punkte)

Bei der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung tritt die Funktion

$$D(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{\omega_0}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \left(e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}\right) \tag{3}$$

auf, wobei $\omega_0 = ck$ und $k = |\boldsymbol{k}|$. Zeigen Sie, dass

$$D(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{2\pi c}\, \epsilon(t)\, \delta(r^2 - c^2 t^2)\,, \tag{4}$$

worin $r = |\boldsymbol{x}|$ und

$$\epsilon(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0\,, \\ 0 & \text{für } t = 0\,, \\ 1 & \text{für } t > 0\,. \end{cases} \tag{5}$$

Hinweis: Schreiben Sie $\boldsymbol{k}$ in Kugelkoordinaten und zeigen Sie zunächst

$$D(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{1}{4\pi c r} \left[\delta(r - ct) - \delta(r + ct)\right]\,. \tag{6}$$

Führen Sie dann eine Fallunterscheidung für $t < 0$, $t = 0$ bzw. $t > 0$ durch.

S 36 Freie elektromagnetische Kugelwellen (optional, +5 Punkte)

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ erfüllen im ladungs- und stromfreien Raum die freie Wellengleichung (vgl. Aufg. 34). Die freie Wellengleichung kann auch durch Kugelwellen gelöst werden, so dass dann eine monochromatische Lösung der Maxwell-Gleichungen gefunden werden kann von der Form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\, \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0\, \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}\,, \tag{8}$$

wobei $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$ die Winkelabhängigkeit enthalten, aber von r unabhängig sind. Aus der Wellengleichung folgt $\omega = ck$.
Zeigen Sie mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, dass diese Wellen transversal sind, d. h. dass $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{e}_r$, und $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$.
Hinweis: Für obige Kugelwellen ist eine Seite der Maxwell-Gleichung $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}$ leichter zu berechnen als die andere.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed16.html