

# Theoretische Physik III: Elektrodynamik

Georg Wolschin

Universität Heidelberg

Institut für Theoretische Physik

<http://wolschin.uni-hd.de>

# Termine

**Vorlesung Dienstags und Donnerstags 11.15 - 13.00 INF 227 HS 1  
(Kirchhoff-Institut)**

**Di 11.10.2011 bis Do 02.02.2012**

**Übungen Di und Mi vormittags und nachmittags ab 18.10.11**

- **Die ca. 17 Übungsgruppen werden bis Di 18.10. eingeteilt.  
Hausaufgaben (max. 3 TeilnehmerInnen pro Blatt)  
werden in den Übungsstunden abgegeben.  
Die Übungen leitet Felix Brezinski, ITP, [f.brezinski@thphys.uni-heidelberg.de](mailto:f.brezinski@thphys.uni-heidelberg.de)**
- **Es gibt eine Klausur im Semester, Termin vorauss.  
Sa 28.01.12. im Chemie-Hörsaal, 10:00-12:00.  
(Das Formelblatt und eine in normaler Schriftgröße selbst geschriebene  
Seite sind erlaubt. Bitte eigenes Papier und einen Lichtbildausweis mitbringen.)**
- **Den Schein mit 8 ECTS-Punkten erhält, wer mindestens 60% der Gesamtpunktzahl  
aus den Übungen und mind. 40% aus der Klausur erreicht.**
- **Die Note wird allein durch das Klausurergebnis bestimmt.**

# Themen

## **1. Einführung:**

Grundbegriffe; Maxwellgleichungen; Einheiten

## **2. Elektrostatik; skalares Potential**

## **3. Magnetostatik; Vektorpotential**

## **4. Spezielle Relativitätstheorie**

## **5. Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik**

## **6. Elektromagnetische Wellen**

## **7. Felder bewegter Ladungen; elektrodynamische Potentiale**

## **8. Hertzscher Dipol**

# Literatur

- J.D. Jackson, Klassische Elektrodynamik
- L.D. Landau, E.Lifschitz, Vol. 2: Klassische Feldtheorie
- Vol. 8: Elektrodynamik der Kontinua
- T. Fließbach, Elektrodynamik
- W. Nolting Grundkurs theoretische Physik. Bd.3 : Elektrodynamik
- Sommerfeld. Elektrodynamik
- W. Greiner, Classical Electrodynamics
- D.J. Griffiths, Elektrodynamik – eine Einführung
- Heidelberger Skripten zur Elektrodynamik von  
M. Bartelmann, D. Gromes, M. Schmidt und F. Wegner

# Zur Geschichte der Elektrodynamik

- ≈900 vChr Entdeckung des Magnetismus in Griechenland (Magnesia)
- ≈600 vChr **Thales** von Milet entdeckt die statische Elektrizität (Bernsteinstab)
- 1638 **Galileo** versucht die Lichtgeschwindigkeit zu messen.
- 1671 Isaac **Newton** zeigt die Spektralzerlegung des Lichtes
- 1675 Olaf **Römer** misst die Lichtgeschwindigkeit mit Hilfe der Jupitermonde:  $c=2.998 \cdot 10^8$  m/s.
- 1820 André Marie **Ampère** zeigt, dass sich parallele Ströme anziehen; 1825 publiziert er gesammelte Resultate zum Magnetismus
- 1833 Michael **Faraday** findet das Induktionsgesetz
- 1848/9 Gustav **Kirchhoff** entdeckt seine Verzweigungsgesetze
- 1864/65 James Clerk **Maxwell** formuliert die Gleichungen des em. Feldes
- 1905 Albert **Einstein** formuliert die Spezielle Relativitätstheorie, und die Theorie des photoelektrischen Effekts.

# 1. Einführung

Thema der Elektrodynamik sind elektrische und magnetische Felder, deren Erzeugung durch Ladungen und Ströme, ihre Ausbreitung in Form elektromagnetischer Wellen, und ihre Wirkung auf Materie durch elektromagnetische Wechselwirkungen.

Die klassische ED ist eine der ältesten Naturwissenschaften. Der Magnetismus ist seit ~900 v. Chr. bekannt (Magnesia, Griechenland), Thales v. Milet beschrieb 600 v. Chr. statische Elektrizität, die beim Reiben eines Bernsteinstabes ("elektron") mit einem Pelztuch entstand. Zum Vergleich: Die Hydrodynamik wurde ~250 v. Chr. durch Archimedes begründet.

Magnetismus und Elektrizität wurden jahrhundertlang als getrennte Phänomene angesehen; erst im 17. Jhd. wurden Zusammenhänge deutlich: 1681 wurde ein Schiff vom Blitz getroffen, die Kompassnadel wechselte die Richtung. Oerstedt beobachtete 1820, dass eine Magnetsnadel von einem parallel zu ihr fließenden Strom abgelenkt wurde. Erst 1864/65 formulierte James Clerk Maxwell die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, 1905 Einstein die spezielle Relativität.

## Maßsysteme:

Lehrbücher der ED verwenden in der Regel das Gaußsche Maßsystem, oder das SI System. Es gibt jedoch auch andere Systeme wie das Heaviside System, die "rationale" Version des Gauß-Systems.

Das SI System wird im Ingenieurbereich bevorzugt, hat aber Nachteile:

So haben das elektrische Feld  $\vec{E}$  und die "dielektrische Verschiebung"  $\vec{D}$  (beschreibt die Wirkung von  $\vec{E}$  auf

Medien) im SI unterschiedliche Einheiten, ebenso

das magnetische Feld  $\vec{B}$  und die "magnetische

Erregung"  $\vec{H}$ .

Außerdem treten im SI die Maßsystemfaktoren

$\epsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$ , Dielektrizitätskonstante, und

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ , Permeabilitätskonstante des Vakuums

auf, die im Gaußschen cgs-System = 1 sind.

Der Zusammenhang zwischen den Maßsystemen

wird in 1.5 dargestellt. Im Gauß-System

treten Faktoren  $c$  (Lichtgeschwindigkeit) explizit

auf, insbesondere in den Maxwell-Gleichungen.

In dieser VL: zunächst SI, dann Übergang zum Gauß-System.

# 1.1 Grundbegriffe der Elektrodynamik

## Ladungen und Ströme:

Ladungsdichte:  $\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$  Raumladungsdichte

Ladung im Volumen  $V$ :  $q = \int_V d^3r \rho(\vec{r})$

Bei Punktladungen  $q_i$  mit Ortsvektoren  $\vec{r}_i$ :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r})$$

mit der Delta-Funktion  $\delta^3(\vec{r}_0 - \vec{r})$ ,

$$\int_V d^3r \rho(\vec{r}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{cases} \rho(\vec{r}_0), & \vec{r}_0 \in V \\ 0, & \vec{r}_0 \notin V \end{cases}$$

analog ist die Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{r})$

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{dA}$$

Strom I: Die Ladung  $dq$ , die pro Zeiteinheit  $dt$  durch  $A$  fließt:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

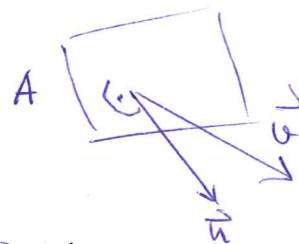
Die Ladung  $dq$ , die in der Zeit  $dt$  durch die Fläche  $\int_A d\vec{A}$  fließt, ist

$$dq = \int_A \underbrace{\vec{v} dt}_{\text{zurückgelegter Weg}} \cdot \rho \cdot d\vec{A}$$

zurückgelegter Weg

gerichtetes

Flächenelement  $d\vec{A} := \vec{n} dA$



$\vec{v}(\vec{r}, t)$  = mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger



Der Strom I wird

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_A \vec{v}(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}, t) d\vec{A} \equiv \int_A \vec{j}_q(\vec{r}, t) d\vec{A}$$

mit der Stromdichte  $\vec{j}_q = \rho \vec{v}$ .

Ladungserhaltung, Kontinuitätsgleichung

Für die elektrische Ladung gilt ein Erhaltungssatz, der in differenzieller Form durch eine Kontinuitätsgleichung ausgedrückt wird.

Die Gesamtladung im Volumen V ist

$$q(t) = \int_V d^3r \rho(\vec{r}, t)$$

ihre zeitliche Änderung ist

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

und bewirkt einen Strom durch die Oberfläche A des Volumens V:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -I(t) = - \int_A \vec{j}_q(\vec{r}, t) d\vec{A}$$

Mit dem Gaußschen Satz

$$\int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \equiv \int_V d^3r \text{div} \vec{a}(\vec{r}) = \int_A d\vec{A} \vec{a}(\vec{r})$$

wird das

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}, t)$$

VA

⇒ Gleichheit der Integranden,

$$\boxed{\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}, t) = 0} \quad \text{kontinuitätsgleichung;}$$

sie drückt die Ladungserhaltung in differentieller Form aus.

Die Ladungseinheit ist im SI-System das Coulomb (C);  
z.B. ist die Elektronenladung

$$e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

Ladungen und Ströme sind die Quellen der

Felder:

Ein elektrisches Feld übt auf Ladungen eine Kraft aus;  
die elektrische Feldstärke ist die Kraft pro Ladung:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Im SI (mks) System ist das Newton (N) die Einheit der Kraft, im Gaußschen cgs System (das wir im Hauptteil der VL benutzen werden) dyn:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 10^5 \text{ dyn} = 10^5 \frac{\text{gcm}}{\text{s}^2}$$

Analog gilt für die Einheiten der Energie und der Leistung:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg}$$

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{s}}$$

Im SI-System ist die Einheit der Feldstärke

$$[\vec{E}] = \frac{N}{C}$$

Die Spannung ist das Integral über die Feldstärke

$$U := - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \text{ und hat die Einheit}$$

$$[U] = \frac{Nm}{C} =: V \text{ (Volt)}$$

so dass die Einheit der Feldstärke auch als

$$[\vec{E}] = \frac{V}{m} \text{ darstellbar ist.}$$

Die Wirkung des Feldes  $\vec{E}$  auf Medien (incl. das Vakuum) ist die "dielektrische Verschiebung"  $\vec{D}$ :  
Eine Ladung  $q$  ruft durch ihr Feld  $\vec{E}$  einen Fluss  $\vec{D}$  hervor, der mit  $q$  gleichgesetzt wird:

$$q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

( $d\vec{A}$  = gerichtetes Flächenelement)

Beispiel:  $A$  = Kugel um  $q$  mit Radius  $r$

$$\Rightarrow q = 4\pi r^2 |\vec{D}|$$

Einheit der dielektrischen Verschiebung:

$$[\vec{D}] = \frac{[\text{Ladung}]}{[\text{Fläche}]} = \frac{C}{m^2}$$

dh. im SI haben  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  unterschiedliche Einheiten  
(im Gauß-System  $[\vec{E}] = [\vec{D}]$ )

Die Stromdichte  $\vec{j}_q = \rho \vec{v}$  hat die Einheit

$$[\vec{j}_q] = \frac{C}{m^3} \cdot \frac{m}{s} = \frac{C}{m^2 \cdot s}$$

Die zeitliche Änderung der dielektrischen Verschiebung hat dieselbe Einheit:

$$[\dot{\vec{D}}] = \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \frac{C}{m^2 \cdot s}$$

Dem entspricht ein sog. "Verschiebestrom", der mit dem Ladungsstrom zum Gesamtstrom  $\vec{j}$  zusammengefasst wird:

$$\text{Gesamtstromdichte} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}}$$

Analog zur Ladung definiert man für magnetische Felder eine Polstärke:

$$\text{Polstärke} = \frac{\text{magnet. Moment}}{\text{Abstand}} = \frac{\text{Strom-Fläche}}{\text{Abstand}}$$

mit der Einheit der Stromstärke Ampere (A) wird

$$[\text{Polstärke}] = \frac{A \cdot m^2}{m} = A \cdot m \quad \left( 1 A = 1 \frac{C}{m^2 \cdot s} \cdot m^2 = 1 \frac{C}{s} \right)$$

$[\vec{j}] \quad [A]$

Die magnetische Feldstärke (magn. Induktion)

$\vec{B}$  wird analog zu  $\vec{E}$

$$\vec{B} := \frac{\text{Kraft}}{\text{Polstärke}} \quad , \quad [\vec{B}] = \frac{N}{A \cdot m}$$

oder mit der Spannungseinheit Volt,

$$1V = 1 \frac{Nm}{C} = 1 \frac{Nm}{As} \Rightarrow 1 \frac{N}{A} = 1 \frac{Vs}{m}$$

$$\Rightarrow [\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2}$$

Die Wirkung des Magnetfeldes auf Medien wird (analog zu  $\vec{D}$ ) durch ein Vektorfeld  $\vec{H}$  beschrieben ("magnetische Erregung"; heute meist "magnet. Feldstärke"). Analog zur dielektrischen Verschiebung (= Ladung / Fläche) ist

$$[\vec{H}] = \frac{[\text{Polstärke}]}{[\text{Fläche}]} = \frac{Am}{m^2} = \frac{A}{m}$$

- Die "Intensitätsgrößen" bestimmen, wie stark das elektromagnetische Feld ist:  $\vec{E}, \vec{B}$
- $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  bestimmen, wie das Medium darauf reagiert.

## 1.2 Die Maxwell'schen Gleichungen

Die Maxwell-Gleichungen sind die Axiome der Elektrodynamik, die auf der Verallgemeinerung empirischer Gesetze beruhen. Wir behandeln sie zunächst in integraler Form (so ist der physikalische Gehalt deutlicher), dann mit Hilfe der Sätze von Gauß und Stokes in differentialer Form.

(1) Wir gehen aus vom Faradayschen Induktionsgesetz (1831 H. Faraday)

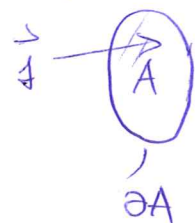
$$\boxed{\int_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} = - \oint_{\partial A(t)} \vec{E} d\vec{s}} \quad \hat{=} \text{eines der 4 Maxwell'schen Gesetze}$$

$\hat{=}$  zeitliche Änderung  $\Rightarrow$  elektrische Ringspannung  
 (Umlaufspannung, geschlossene elektr. Feldlinien)  
 [des magnet. Flusses]  $\left[ \Phi = \int \vec{B} d\vec{A}; \frac{d\Phi}{dt} = - \oint (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) d\vec{s} \right]^*$   
 Minuszeichen: Lenz'sche Regel  
 (Induktionsspannung wirkt ihrer Ursache entgegen)

(2) und vom Ampèreschen Gesetz

$$\boxed{\int_A \vec{j} d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{s}}$$

Strom, der durch die Fläche A fließt  $\hat{=}$  Integral des magnet. Feldes um eine geschlossene Kurve, die A einschließt



("Ein Strom ruft ein ihm proportionales Magnetfeld hervor, dessen Richtung mit der des Stromes eine Rechtsschraube bildet").

\*  $\vec{u}$  ist die Geschwindigkeit der Konturlinie  $\partial A(t)$

(3) In Maxwell Erweiterung des Ampèreschen

Gesetzes ist dabei der Verschiebungsstrom berücksichtigt,

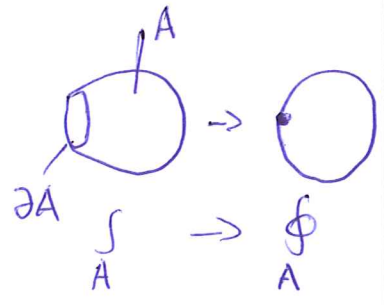
$$\vec{j} = \vec{j}_q + \vec{D} \quad \left( \vec{D} \equiv \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

mit  $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = q$  ; die Definition von  $\vec{D}$  ist im Einklang mit dem Ampèreschen Gesetz (auch mathematisch beweisbar\*).

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \frac{dq}{dt} = - \oint_A \vec{j}_q d\vec{A}$$

(4) Das Magnetfeld hat keine Quellen ( $\hat{=}$  magnet. Monopole); ausgehend vom Induktionsgesetz lassen wir den Rand der Fläche A zu einem Punkt schrumpfen:

$$\frac{d}{dt} \oint_A \vec{B} d\vec{A} = - \oint_{\partial A} \vec{E} ds = 0$$



(die Fläche ist jetzt geschlossen!)

$$\Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{A} = \text{const}_t \quad (\text{zeitlich konstant})$$

$$\forall \vec{B}, \text{ auch für } \vec{B} = 0$$

$\Rightarrow \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$  : Der magnetische Fluss durch jede geschlossene Fläche verschwindet.

\* Randkurve im Ampèreschen Gesetz zu Punkt schrumpfen

$$\Rightarrow \oint_A \vec{j} d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{H} ds = 0 \Rightarrow \oint_A \vec{j}_q d\vec{A} = - \oint_A \vec{D} d\vec{A}$$

$$\text{bei zeitlich konstantem } A \Rightarrow \oint \vec{D} d\vec{A} = \frac{d}{dt} \oint \vec{D} d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \underbrace{- \int dt \oint \vec{j}_q d\vec{A}}_q + \text{const} \quad \left. \vphantom{\int dt} \right\} \Rightarrow \oint_A \vec{D} d\vec{A} = q \quad \checkmark$$

(1) - (4) ergibt die vier Maxwellgleichungen  
in integraler Form:

1)	$\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = - \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s}$	Induktionsgesetz, Faraday
2)	$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s}$	Ampèresches Gesetz (mit Verschiebungsstrom!)
	$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$	Quellenfreiheit des Magnetfeldes
	$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q$	Ladung als Quelle des elektrischen Feldes

In Komponenten sind das acht Gleichungen.  
Sie lassen sich mit dem Integralsätzen von  
Stokes und Gauß in differentielle Form bringen.

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $A$   
mit Rand  $\partial A$  ergibt der Gaußsche Satz

$$\oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \, dV$$

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V (\nabla \cdot \vec{D}) \, dV$$

( $V$  das durch die Fläche  $A$   
eingeschlossene Volumen)



sowie der Stokesche Satz

1.12

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A}$$

$$\oint_{\partial s} \vec{H} d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{H}) d\vec{A}$$

Die Ladung  $q$  wird durch ein Volumenintegral  
der Ladungsdichte ausgedrückt,

$$\int_V \rho dV = q \quad \forall V \Rightarrow \text{Gleichsetzen des Integranden}$$

$\Rightarrow$  Maxwell-Gleichungen in differentieller Form:

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

Im SI (mks) System.

Dazu kommt die Kontinuitätsgleichung,

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q = 0$$

Sie folgt aus (2) und (4) über  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_q + \dot{\vec{D}})$   
mit  $\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{D}} = \dot{\rho} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q + \dot{\rho} = 0$ .

## 1.3 Materialgleichungen

Maxwell-fl. und Kontinuitätsgleichung liefern 9 Gleichungen für die 16 Größen  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{j}$  und  $\rho$ .

Weitere Gleichungen sind also zur Verknüpfung der Felder nötig. Zunächst werden die sog.

Materialkonstanten eingeführt:

Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$ ,  $[\epsilon] = \frac{As}{Vm}$

Permeabilitätskonstante  $\mu$ ,  $[\mu] = \frac{Vs}{Am}$

Leitfähigkeit  $\sigma$ ,  $[\sigma] = \frac{A}{Vm} =: \frac{1}{\Omega m}$

mit der Einheit des Widerstandes,  $1 \Omega = 1 \frac{V}{A}$

Die Konstanten für das Vakuum hatten wir bereits eingeführt; für Medien ist

$$\epsilon > \epsilon_0.$$

Für paramagnetische Medien ist  $\mu > \mu_0$ ,

für diamagnetische  $\mu < \mu_0$ .

Die Felder werden in der Regel linear durch die Materialkonstanten verknüpft:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j}_q &= \sigma \vec{E}\end{aligned}$$

Damit werden die Maxwell-Gleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \dot{\vec{H}}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} (\mu \vec{H}) = 0$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} (\epsilon \vec{E}) = \rho$$

dh. 8 Gleichungen für die 7 Größen  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  und  $\rho$

Die Kontinuitätsgleichung wird mit Materialkonstanten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\sigma \cdot \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \epsilon \vec{E} \right) = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0}$$

mit (4), sofern die Ortsabhängigkeit von  $\frac{\sigma}{\epsilon}$  vernachlässigbar ist.

Die Lösung der DGL ist

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t / \epsilon} = \rho_0 e^{-t / \tau}$$

mit  $\tau := \epsilon / \sigma$  Relaxationszeit.

Für "ideale" Leiter mit  $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow \tau = 0$

$\Rightarrow \rho = 0$  für kleine Zeiten bereits.

## 1.4 Coulomb- und Lorentz-Kraft

Das elektrische Feld  $\vec{E}$  und die magnetische Induktion  $\vec{B}$  erzeugen auf eine Ladung  $q$ , die sich am Ort  $\vec{r}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, die Kraft

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}) + q (\vec{v} \times \vec{B})}$$

$\uparrow$   
Coulombkraft

$\uparrow$   
Lorentzkraft

(dabei rühren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht von  $q$  her; die von  $q$  erzeugten Felder bewirken zusätzlich eine 'Reaktionskraft').

Die Kraftdichte (Kraft auf ein kleines Volumen) ist

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}_q(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

# 1.5 Übergang zu Gaußschen Einheiten

Im SI hatten wir die Einheiten C, A, V und  $\Omega$  eingeführt, sowie die Materialkonstanten  $\epsilon, \mu$  (bzw.  $\epsilon_0, \mu_0$  für das Vakuum).

Im Gauß-System sind  $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$ ,  
 so dass die sog. "Verbreitungskonstante"  $\gamma := c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$   
 den Wert  $\gamma = c$  hat, mit der Lichtgeschwindigkeit  
 im Vakuum,

$c = 299792458 \text{ m/s}$

Zur Umrechnung von Maßsystemen ineinander (Herleitung siehe Literatur!) sind 4 Konstanten erforderlich:

System	$\epsilon_0$	$\mu_0$	$\gamma$	$\eta$
Gauß	1	1	c	1
Heaviside-Lorentz	1	1	c	$4\pi$
SI	$(c^2 \mu_0)^{-1}$	$\frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	1	$4\pi$

Maßsysteme mit  $\eta = 4\pi$  heißen "rational", solche mit  $\eta = 1$  "irrational". Es ist

$$\vec{E}_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} E_G \quad ; \quad 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{1}{3} 10^{-4} \sqrt{\text{dyn}} \text{cm}^{-1}$$

$$\vec{B}_{SI} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B_G \quad ; \quad 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 10^4 \sqrt{\text{dyn}} \text{cm}^{-1} = 10^4 G \quad (\text{Gauß})$$

(1 Tesla, 1T)  $\Rightarrow$   $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  Felder

Die Elementarladung ist  $e_0^G = 4.803 \cdot 10^{-10} \sqrt{\text{dyn}} \text{cm}$  haben im Gauß-System gleiche Einheiten ( $\vec{D}, \vec{H}$  Analog)

$e_0^{SI} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$  "esu"

Im Gauß-System werden die Maxwellgleichungen

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

$$(3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(4) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho$$

( $\rho \equiv \rho_f$ , Dichte der frei beweglichen Ladungen  
q)

Im Vakuum ist  $\vec{E} = \vec{D}$  und  $\vec{B} = \vec{H}$

Weitere Einheiten im Gauß-System sind

$$[\rho] = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}^{-2} \text{ Ladungsdichte}$$

$$[\vec{j}] = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ Stromdichte}$$

$$[q] = [\rho][r]^3 = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm} \text{ Ladung}$$

$$[I] = [j][r]^2 = \sqrt{\text{dyn}} \text{ cm} \text{ s}^{-1} \text{ Stromstärke}$$

$$[F] = [q][\vec{E}] = \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm} \cdot \sqrt{\text{dyn}} \cdot \text{cm}^{-1} = \text{dyn},$$

Werk.

## 2. Elektrostatik

In zeitunabhängigen Feldern hängen alle elektromagnetischen Variablen nur vom Ort ab,

$$\rho = \rho(\vec{r}); \vec{j} = \vec{j}(\vec{r}); \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}); \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}).$$

Die Kontinuitätsgleichung wird

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q(\vec{r}) = 0$$

und die Maxwellgleichungen im Vakuum ( $\vec{E} \equiv \vec{D}, \vec{B} \equiv \vec{H}$ ) werden

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_q(\vec{r})$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \rho(\vec{r})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$



Elektrostatik



Magnetostatik

Elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  und Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  als Variable

$\vec{B} = 0$  ( $\vec{j}_q = 0$ : keine Ströme bzw. Ströme werden ignoriert)

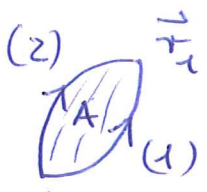
$\vec{E}$  zeitunabhängig

Magnetische Induktion  $\vec{B}(\vec{r})$  und Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  als Variable;

$\vec{j}, \vec{B}$  zeitunabhängig

### 2.1 Elektrisches Feld und Potential

Zur Einführung des elektrischen Potentials betrachten wir das Wegintegral des  $\vec{E}$ -Feldes auf zwei unterschiedlichen Wegen

$$\int_{\vec{r}_0(1)}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0(2)}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} + \oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$


Mit dem Stokeschen Satz und der Maxwellgleichung für ein statisches  $\vec{E}$ -Feld verschwindet das Integral über den geschlossenen Weg.

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_A d\vec{A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})) = 0$$

↑ A
↑  
 Stokes                      Maxwell

⇒ das Integral ist im statischen Fall wegunabhängig.

Man definiert das elektrische Potential dann als

$$\phi(\vec{r}) := - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{E}(\vec{r}') + \phi(\vec{r}_0)$$

mit einer konstanten  $\phi(\vec{r}_0)$ , so dass  $d\phi(\vec{r}) = -d\vec{r} \vec{E}(\vec{r})$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$$

und mit der Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$  folgt die

$$\Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

Poisson-Gleichung für den Zusammenhang zwischen Ladung und elektrischem Potential.



Der Zusammenhang zwischen Ladung und elektrischem Fluss durch eine Oberfläche A folgt durch Integration des MWG für das  $\vec{E}$ -Feld über das Volumen:

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi \int_V d^3r \rho(\vec{r}) = 4\pi q$$

und durch Umwandlung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\boxed{\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q} \equiv \text{Elektrischer Fluss}$$

"Der elektrische Fluss durch die Oberfläche A ist das  $4\pi$ -fache der Ladung im eingeschlossenen Volumen"

Für eine Punktladung im Ursprung folgt z.B.

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q$$

↑  
kugelsymmetrisch

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{q}{r^2}}, \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} q}$$

(siehe auch Einleitung dort im SI, hier Gauß-System!)

Aufgrund der Symmetrie hängt das Potential ebenfalls nur von r ab, so dass

$$\vec{\nabla} \phi(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} = -\vec{E}(\vec{r}), \text{ und durch Integration}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{q}{r} + \text{const.}}$$

Potential von Ladungsverteilungen:

Bei mehreren Punktladungen  $q_i$  an Orten  $\vec{r}_i$  wird das Potential analog

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

und die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

[Die MWG sind linear in Feldern u. Quellen:  $\Rightarrow$  Felder können linear superponiert werden]

Beim Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen mit Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  wird aus der Summe ein

Integral,

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Potential,}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{elektr. Feld.}$$

Es gilt auch hier die Poisson-Gleichung,

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r}), \text{ und mit dem expliziten}$$

Ausdrücken für  $\phi$  (s.o.) und  $\rho$ :

$$\int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad \forall V$$

$\Rightarrow$  auch die Integranden müssen gleich sein,

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

In ladungsfreier Gebiete mit  $\Delta \phi = 0$ : Laplace-Fl.

## 2.2 Coulombkraft

2.5

Die elektrische Kraft auf eine Ladung  $q_i$  im elektrischen Feld am Ort  $\vec{r}_i$  ist

$$\vec{F}_i = q_i \vec{E}(\vec{r}_i)$$

(im Feld  $\vec{E}$  ist nicht das von der Ladung selbst erzeugte Feld enthalten).

Die Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen  $q_1, q_2$  ist

$$\vec{F}_{12} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

für Ladungen, deren Ausdehnung klein ist gegenüber ihrem Abstand  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ .

Bei mehreren Ladungen gibt es eine lineare Superposition der Kräfte:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^N q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

und beim Übergang zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}') d^3r'$  wird aus der Summe ein Integral,

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \int d^3r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$\equiv \vec{E}(\vec{r})$

Umgekehrt erhält man daraus den Punktladungsfall, indem man die Dichte diskretisiert:

$$\rho(\vec{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

## 2.3 Elektrostatische Energie

Im Fall diskreter Ladungen  $q_i$  wird die elektrostatische potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i(\vec{r}_i)$$

und die Kraft (prüfen durch Einsetzen u. Differenzieren!)

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla} U_i$$

Im Kontinuum wird das mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \phi = \vec{\nabla}(\vec{E} \phi) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \phi$ :

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{HWG } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}}{=} \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) =$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Satz v. Gauß}}}{=} \frac{1}{8\pi} \int dA \vec{E}(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \phi(\vec{r})}_{= -\vec{E}(\vec{r})}$$

Bei "dicht gepackten" Ladungen muss der Beitrag der Ladungsschicht zum Potential  $\phi$  am gleichen Ort berücksichtigt werden:

Beispiel: Alle kontinuierlich verteilten Ladungen seien in einer Kugel vom Radius  $R$  eingeschlossen

Für  $R \rightarrow \infty$  gilt wg.

$$\phi \propto 1/R, \quad E \propto 1/R^2, \quad \int_A dA \vec{E} \cdot \phi \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$  Die elektrostatische Energie wird

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r})$$

Die elektrostatische Energie lässt sich mit der  
Energiedichte  $u(\vec{r})$  allgemein schreiben als

$$U = \int d^3r u(\vec{r}), \text{ und der vorherige Spezialfall als}$$

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2(\vec{r}).$$

Aus der elektrostatischen Energie bestimmt man auch  
den sog. "klassischen Elektronenradius" (siehe  
Particle Physics Booklet 2010, Seite 4):

$$R_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.818 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (\text{im cgs (Gauß-) System})$$

(beachte jedoch: das Elektron ist ein Punktteilchen  
und hat keinen "Radius" wie z.B. das Proton).

Die elektrostatische Energie der Elektronen wird bei  
gleichmäßiger Verteilung der Ladung  $e$  auf einer  
Kugeloberfläche mit Radius  $\hat{R}_e$  (die Feldstärke im  
Inneren ist Null!):

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V \left(\frac{e}{r^2}\right)^2 d^3r = \frac{1}{8\pi} \int_{\hat{R}_e}^{\infty} \int_{\Omega} \left(\frac{e^2}{r^2}\right)^2 d^3r =$$

$$= \frac{4\pi}{8\pi} \frac{e^2}{\hat{R}_e} = \frac{e^2}{2\hat{R}_e} \quad \text{Elektrostatische Energie des Elektrons}$$



Mathematischer Einschub:

Vollständige Funktionensysteme; Kugelfunktionen;  
Legendre-Polynome

In der theoretischen Physik beschreibt man Funktionen  $f(\vec{r})$  einer Vektorvariablen  $\vec{r} \equiv (x, y, z) \equiv (r, \vartheta, \varphi)$  oft durch sog. vollständige orthogonale Funktionensysteme.

Dies ist analog zur Darstellung eines Vektors  $\vec{a}$  durch paarweise orthogonale (oder orthonormale) (Einheits-) Vektoren  $\vec{e}_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ :

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{e}_i, \quad \text{mit } a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \quad |\vec{e}_i| = 1$$

Normierung:  
Einheitsvektor

Für 3 kartesische Koordinaten:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha(\vec{a}, \vec{b})$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  orthogonal ( $\alpha = \alpha(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ ),

$$\text{gilt } \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$$

Das Skalarprodukt ist kommutativ (symmetrisch:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ) und bilinear, d.h. es gilt das Assoziativgesetz für die Multiplikation mit Skalaren:

$$(\tau \vec{a}) \cdot \vec{b} = \tau (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\tau \vec{b}) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \forall \text{ Vektoren } \vec{a}, \vec{b}$$

sowie das Distributivgesetz (das Skalarprodukt ist additiv in jedem Argument):

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \end{aligned} \right\} \forall \text{ Vektoren } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

Begriffe und Schreibweisen:

Basis  $\vec{e}_i$

Orthogonalität:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

Vollständigkeit:  $\sum_i (\vec{e}_i)_\rho (\vec{e}_i)_\mu = \delta_{\rho\mu}$

Darstellung:  $\vec{a} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)$

Analog zur Darstellung eines Vektors in einer (vollständigen) Basis von Einheitsvektoren

lassen sich sog. quadratintegrale Funktionen  $f(\vec{r})$

- d.h.  $\int d^3r |f(\vec{r})|^2 < \infty$  -

nach einem vollständigen orthogonalem Funktionensystem entwickeln.

Definiere zunächst ein Skalarprodukt

zwischen quadratintegrale Funktionen  $f, g$  über einem reellen Intervall  $[a, b]$  als

$(f, g) := \int_a^b dx f(x) g^*(x)$

, \* = komplexe Konjugation



und analog im 3d:

$$(f, g) := \int d^3r f(\vec{r}) g^*(\vec{r})$$

(siehe Blatt 4, Aufg. 1)

$(f, g)$  erfüllt die bei Vektoren diskutierten Eigenschaften des Skalarproduktes, s.S. M.1.1/1.2.

Zwei (von Null verschiedene) Funktionen heißen orthogonal, wenn das Skalarprodukt verschwindet:

$$f, g \text{ orthogonal} \Leftrightarrow (f, g) = 0$$

Eine Funktion  $f$  heißt normiert, wenn

$$(f, f) = 1.$$

Für den Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen gibt es ein Basisystem (= vollständiges Orthogonalsystem), das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Basis besteht aus abzählbar vielen Funktionen  $\{u_N(\vec{r})\}$

(2) Die  $u_i$  sind orthonormiert:  $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

(3) Jede quadrat-integrierbare Funktion  $f(\vec{r})$  lässt sich nach dem Basisystem entwickeln:

$$f(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N a_i u_i(\vec{r})$$

"Darstellung" von  $f(\vec{r})$  in der Basis  $\{u_N(\vec{r})\}$

Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich als Skalarprodukt von  $f$  mit den  $u_m$ :

$$(f, u_m) = \int d^3r f(\vec{r}) u_m^*(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \int d^3r u_i(\vec{r}) u_m^*(\vec{r}) =$$

$$= \sum_{i=1}^N a_i \delta_{im} = \boxed{a_m = (f, u_m)}$$

Im allgemeinen wird eine unendliche Summe für die Konvergenz notwendig sein.

(Bei abzählbaren Basissystemen wird die Summe durch ein Integral ersetzt.)

⇒ Forderung: Die Reihendarstellung soll gegen die Funktion konvergieren gemäß

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int d^3r \left| f(\vec{r}) - \sum_{i=1}^N a_i u_i(\vec{r}) \right|^2 = 0$$

Mit  $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - a^*b - b^*a$  wird das

$$\int d^3r \left[ |f|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_i a_j^* \underbrace{u_i u_j}_{=\delta_{ij}} - \underbrace{f^* \sum_{i=1}^N a_i u_i}_{=\sum_{i=1}^N |a_i|^2} - \underbrace{f \sum_{i=1}^N a_i^*}_{=\sum_{i=1}^N |a_i|^2} \right]$$

$$= \int d^3r |f(\vec{r})|^2 - \sum_{i=1}^N |a_i|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^N |a_i|^2 \leq \int d^3r |f(\vec{r})|^2}$$

Besselsche  
Ungleichung

(Da das Integral über den nicht-negativen Ausdruck  $|f(\vec{r}) - \sum_{i=1}^N a_i u_i|^2$  notwendig nicht-negativ ist).

Um die Konvergenzforderung zu erfüllen, muss im Limes  $N \rightarrow \infty$  das Gleichheitszeichen gelten,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |a_i|^2 = \int d^3r |f(\vec{r})|^2 \quad \text{Parseval'sche Gleichung}$$

Aus der Parsevalgleichung folgt die Bedingung für die "Vollständigkeit" des Orthogonalsystems,

nach dem wir  $f(\vec{r})$  entwickelt haben:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 = \int d^3r \int d^3r' \sum_{i=1}^{\infty} [u_i^*(\vec{r}) u_i(\vec{r}')] f(\vec{r}) f^*(\vec{r}') \\ \int d^3r f^*(\vec{r}) f(\vec{r}) = \int d^3r \int d^3r' \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') f(\vec{r}) f^*(\vec{r}')$$

d.h. die Parseval-Gleichung ( $\equiv$  Gleichheit der linken Seiten) ist äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{\infty} [u_i^*(\vec{r}) u_i(\vec{r}')] = \delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$$

Vollständigkeitsrelation

Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

Die Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  mit  $-l \leq m \leq l$  bilden ein orthogonales Funktionensystem auf der Einheitskugel: eine (zweidimensionale) Basis, nach der sich andere zweidimensionale Funktionen (z.B. der Winkelanteil der Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta\phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$ ) entwickeln lassen. Es gibt für jedes  $l$   $(2l+1)$  Kugelflächenfunktionen,  $l=0, 1, 2, \dots$

Sie sind orthonormiert:

$$(Y_{l'm'}, Y_{lm}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und die Vollständigkeit ergibt sich aus der Bedingung auf Seite M.1.5,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta', \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

Weitere Eigenschaften der  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ :

$$Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l, -m}(\vartheta, \varphi)$$

z.B.

$$Y_{1,1}^* = \left( -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\vartheta e^{+i\varphi} \right)^* = -Y_{1,-1}(\vartheta, \varphi)$$

( $Y_{00}, Y_{10}$  ist reell, v.S. 2.20)

Die  $Y_{lm}$  sind Lösungen der partiellen  
Differentialgleichung

$$\Delta_{\Omega} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Mit dem Winkelanteil des Laplace-Operators,  $\Delta_{\Omega}$ :

$$\Delta_{\Omega} \equiv \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

z.B. für  $Y_{11}$  von Seite M1.6:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Omega} (\sin \vartheta e^{i\varphi}) &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta e^{i\varphi}) \\ &\quad + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} e^{i\varphi} \stackrel{!}{=} -2 \sin \vartheta e^{i\varphi} \\ &= \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} (-\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \right] e^{i\varphi} \stackrel{!}{=} -2 \sin \vartheta e^{i\varphi} \\ &\Rightarrow -\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta - 1 \stackrel{!}{=} -2 \sin^2 \vartheta \quad \checkmark \text{ erfüllt} \end{aligned}$$

Da die  $Y_{lm}$  ein vollständiges Orthonomalsystem auf der Kugeloberfläche bilden, lässt sich jede auf der Kugel differenzierbare Funktion mit beschränkten Ableitungen entwickeln:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \text{ mit Koeffizienten}$$

$$a_{lm} = (f, Y_{lm}) = \int d\Omega f(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega), \text{ v. S. (2.19).}$$

Für die über  $n$  normierten Kugelflächenfunktionen gilt ein sog. "Additionstheorem":

$$\frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = P_{\ell}(\cos \Theta)$$

mit  $\Theta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$ : die Richtung von  $\vec{r}$  ist durch  $(\vartheta, \varphi)$ , die von  $\vec{r}'$  durch  $(\vartheta', \varphi')$  bestimmt.

und dem (Für  $\vartheta'=0$  wird  $\Theta \equiv \vartheta$ ).

## Legendre - Polynome

$$P_{\ell}(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_{\ell 0}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{die } Y_{\ell 0} \text{ haben keine } \varphi\text{-Abhängigkeit}),$$

Mit dem Ausdruck für die  $Y_{\ell 0}$  (siehe 2.20) ergibt sich

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ etc.}$$

(beachte:  $P_{\ell}(1) = 1$ )

Auch die Legendre - Polynome bilden - auf dem

Intervall  $[-1, 1]$  - ein vollständiges Orthogonalsystem.

$$\int_{-1}^{+1} P_{\ell}(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell n}$$

und jede Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich nach

Legendre - Polynomen entwickeln:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} P_{\ell}(x), \quad c_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_{\ell}(x) dx$$

Beispielsweise lässt sich der Ausdruck  $|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}$  mit  $|\vec{r}'| < |\vec{r}|$  und  $\vartheta = \angle(\vec{r}, \vec{r}')$  - siehe Multipolentwicklung (Seite 2.19) - entwickeln als

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} = \frac{1}{r\sqrt{1+(\frac{r'}{r})^2-2\frac{r'}{r}\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta)$$

Die  $P_l(x)$  sind Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung

$$(1-x^2)f'' - 2xf' + l(l+1)f = 0, \quad l \in \mathbb{N}_0$$

(mit der allg. Lösung  $f(x) = AP_l(x) + BQ_l(x)$ , mit  $Q_l \equiv$  Legendre-Funktionen 2. Art  $\Rightarrow$  die  $P_l$  sind partikuläre Lösungen (keine Polynome)).

Es gibt mehrere Darstellungsfornen für die  $P_l$ , z.B. die Rodrigues-Formel

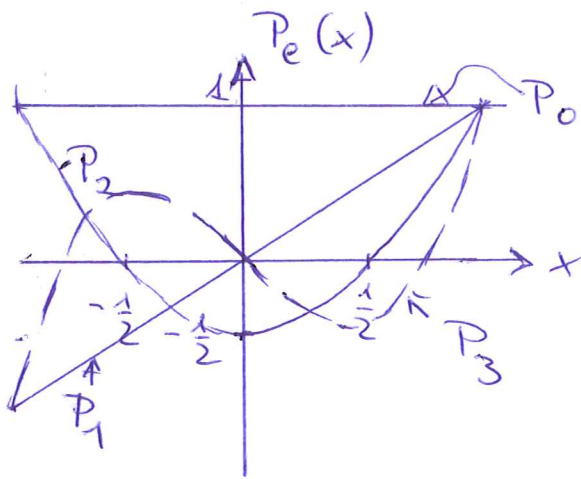
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l],$$

die Integraldarstellung

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [x + \sqrt{x^2-1} \cos\varphi]^l d\varphi \quad x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

oder Rekursionsformeln.

Die Legendre-Polynome als orthogonales Funktionensystem spielen v.a. in der Elektrodynamik und in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle.



Legendre-Polynome:

$$P_0(x) = 1; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Die assoziierten Legendre-Polynome  $P_{lm}(x)$  definiert man mittels der  $P_l(x)$  als  $m$ -te Ableitung,

$$P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m > 0$$

$$P_{l-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(x) \quad \text{für } m < 0,$$

bzw. durch den auf Seite (2.19) gezeigten allg. Ausdruck.

Der Zusammenhang mit den Kugelflächenfunktionen ist

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

s. S. (2.19).

Wie bei den  $Y_{lm}$  diskutiert, lässt sich aufgrund der Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen jede Funktion  $f(\vartheta, \varphi)$  auf der Einheitskugel durch Kugelflächenfunktionen darstellen.



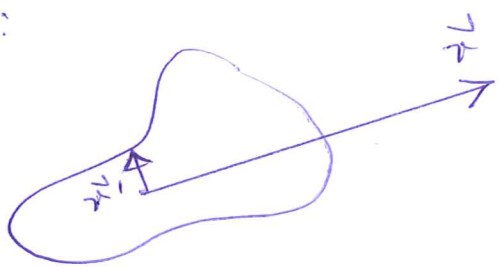
# 2.4 Multipolentwicklung

## 2.4.1 Monopol, Dipol, Quadrupol

Für das Potential  $\phi(\vec{r})$  einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  hatten wir den (exakten) Ausdruck gefunden

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Jetzt bestimmen wir die führenden Beiträge der Ladungsverteilung zum Potential anhand einer Taylor-Entwicklung nach  $\vec{r}'$ . Die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}')$  soll bei  $\vec{r}' \approx 0$  zentriert sein, und  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'|$ , d.h. der "Beobachter" (bei  $\vec{r}$ ) ist weit entfernt von der Ladungsverteilung:



Die ersten drei Glieder der Taylor-Entwicklung nach  $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$  sind

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} - \left( \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \left( \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right) \left( \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{1}{r} - \dots$$

↑
↑
↑

Monopol      Dipol,  $\vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$       Quadrupol

Die vollständige Entwicklung wird

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^l}{l!}}_{(*)} \frac{1}{r} \equiv e^{-\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}} \left[ \frac{1}{r} \right].$$

Wir berechnen die ersten Terme der Entwicklung:

mit  $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$  [wegen  $\vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r} f'(r)$ ]

wird  $(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$ ,

$$\frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \left( \frac{-\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \stackrel{\text{Produktregel}}{=}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}) (\vec{r}' \cdot \vec{r}) + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} (\vec{r}' \cdot \vec{r})}{r^3} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \left( -3\vec{r}' \cdot \frac{\vec{r}}{r^5} \right) (\vec{r}' \cdot \vec{r}) + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{\nabla} (\vec{r}' \cdot \vec{r})}{r^3} \right]$$

mit der Matrixdarstellung  $[\vec{r}' = (x, y, z)]$ :

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{r}' \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

[beachte:  
 $\vec{\nabla}_r (\vec{r}' \cdot \vec{r}') = \vec{r}'$ ,  
 $(\vec{\nabla}_r \vec{r}') \cdot \vec{r}' = 3\vec{r}'$ ]

so dass

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \\ & = \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}' \cdot \vec{r}')^2}{r^5} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} \end{aligned}$$

$(*) \equiv$  Operator, der auf  $1/r$  wirkt!

Die Terme sind also nach steigenden Potenzen von  $r$  im Nenner geordnet: Bei großen Abständen  $r$  dominiert ein Monopol mit kleinen Dipol- und Quadrupolcharakteren. Bei kleineren Abständen werden jedoch Dipol u. Quadrupol wichtig:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^3} + \frac{3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \dots$$

Der Zähler des letzten Terms lässt sich schreiben als

$$3(\vec{r}\cdot\vec{r}')^2 - r^2 r'^2 = x_i' x_k' (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) = (x_i' x_k' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ik}) (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$$

↑  
zusätzlicher Term, der bei der Kontraktion mit  $(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})$  verschwindet:

$$\delta_{ik} (3x_i x_k - \delta_{ik} r^2) = 3x_i x_i - r^2 \delta_{ii} = 0$$

dabei wird über alle Indizes summiert, die zweimal in einem Produkt auftauchen ("Summenkonvention"), hier also über  $i, k = 1, 2, 3$ .

Der zusätzliche Term sorgt für die Spurfreiheit des Quadrupolmoments, s.u.

Die Multipolentwicklung des Potentials  $\phi(\vec{r})$  wird mit

$$q = \int d^3r' \rho(\vec{r}') \text{ Ladung}$$

$$\vec{p} := \int d^3r' \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \quad \text{Dipolmoment der Ladungsverteilung } \rho(\vec{r})$$

$$Q_{ik} := \int d^3r' \left( x_i' x_k' - \frac{1}{3} \delta_{ik} r'^2 \right) \rho(\vec{r}')$$

Komponenten des Quadrupolmoment der Ladungsverteilung

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + Q_{ik} \frac{3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}}{2r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

(der Term  $-r^2 \delta_{ik}$  verschwindet bei Kontraktion mit  $Q_{ik}$ )

$\Rightarrow$  der Monopol fällt mit  $1/r$  ab, der Dipol mit  $1/r^2$ , ein Quadrupol mit  $1/r^3$  etc.

Die Feldstärke folgt als Gradient des Potentials:

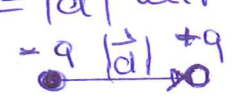
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

dh. fällt ein Term im Potential mit  $1/r$  ab, dann im Feld mit  $1/(n+1)$ :

Dipol im Potential mit  $1/r$ , im Feld mit  $1/r^2$ , usw.

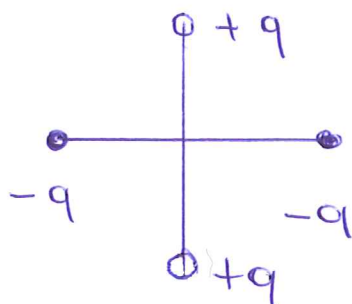
Die einfachste Darstellung eines Dipols sind 2 Punkt-

ladungen  $\pm q$  im Abstand  $d = |\vec{d}|$  mit dem

Dipolmoment  $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$  

## Quadrupol

Einfachste Darstellung: 4 Punktladungen, je zwei positive / negative gegenüberliegend mit gleichem Betrag:



Sowohl die Gesamtladung als auch das Dipolmoment verschwinden, kein "reines" Quadrupol.

Das Quadrupolmoment ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe,

$$Q_{ik} = Q_{ki}$$

und kann deshalb wie der Trägheitstensor durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalfarm gebracht werden.

Aus der Definition (S. 2.12) folgt (mit  $\delta_{ii} \equiv \sum_i \delta_{ii} = 3$ )

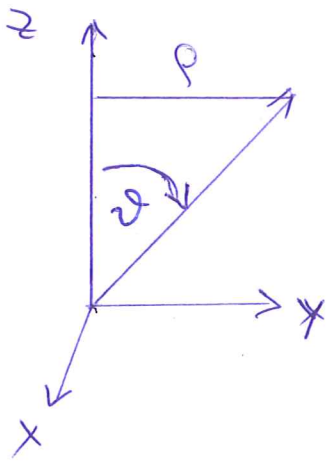
$Q_{ii} = 0$ , so dass

$$\boxed{\sum_i Q_{ii} = 0}$$

: Die Spur des Quadrupolmoments verschwindet.

$$\underline{\underline{Sp\ Q = 0}}$$

## Symmetrisches Quadrupol



Die Ladungsverteilung hängt nur von  $z$  und  $\rho = \rho(z, \sqrt{x^2 + y^2})$  ab (Beispiel "reines Quadrupol").

Dann gilt:

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

(wegen  $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) = \rho(x, -y, z)$ ), und

$$Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2} Q_{zz} \quad \text{wg. } \text{Sp } Q = 0$$

Man definiert hier das Quadrupolmoment als

$$Q := \frac{3}{2} Q_{zz} = \int d^3r' \left( \frac{3}{2} z'^2 - \frac{1}{2} r'^2 \right) \rho(\vec{r}') \quad \underbrace{z' = r' \cos \vartheta'}_{}$$

$$= \int d^3r' r'^2 \underbrace{\left[ \frac{3}{2} (\cos \vartheta')^2 - \frac{1}{2} \right]}_{}$$

$$= P_2(\cos \vartheta') \quad \text{Legendre-Polynom}$$

$$[P_{20}(\cos \vartheta')]$$

zugeordnete (assozierte) Legendre-Polynome

$$\Rightarrow \boxed{Q = \int d^3r' r'^2 P_2(\cos \vartheta') \rho(\vec{r}')} \quad \text{!}$$

(manchmal  $\hat{Q} := \frac{1}{2} Q_{zz}$ , bei Definition von  $Q_{ik}$  mit zusätzl. Faktor 3),

zu Tensoren

Tensor unter Stufe : Größe mit  $n$  Indizes.

Umlaufen sind Tensoren erster Stufe mit

(z.B. Drehung um die  $x$ -Achse:

$$x_i' = \sum_{i'} D_{ii'} x_{i'}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

mit den Elementen  $D_{ii'}$  als Drehmatrix  $D$ :

Drehungen wirken auf jede indizierte Größe als

orthogonale Matrizen mit  $D^T D = D D^T = \mathbb{1}$ .

Tensoren zweiter Stufe wie das Quadrupolmoment

transformieren als

$$A_{ik}' = \sum_{i'k'} D_{ii'} D_{kk'} A_{ik'}$$

Invariante Tensoren:

Zweiter Stufe: wobei  $\delta_{ik} = \delta_{ik}'$ , denn

$$\delta_{ik}' = \sum_{i'k'} D_{ii'} D_{kk'} \delta_{i'k'} = \sum_{i'} D_{ii'} D_{ki'} = \sum_{i'} D_{ii'} D_{ik}'^T =$$

$$= \delta_{ik} \text{ wg. Orthogonalität von } D.$$

Dritter Stufe: Levi-Civita-Tensor (siehe 1. Präsenzübung)

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}$$

(Das Vektorprodukt  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$  ist

unter Drehungen invariant; also ist auch

$\varepsilon_{ijk}$  invariant!)

## Multipol im äußeren Feld

Eine um den Ursprung lokalisierte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  sei in einem äußeren Feld, das durch ein Potential  $\phi_a(\vec{r})$  beschrieben und von einer entfernten Ladungsverteilung  $\rho_a(\vec{r})$  erzeugt wird.

Die Wechselwirkungsenergie ist

$$U_w = \int d^3r \rho(\vec{r}) \phi_a(\vec{r})$$

(kein Faktor  $\frac{1}{2}$  hier, da ein zweites, gleichgroßes Beitrag von  $\int d^3r \rho_a(\vec{r}) \phi(\vec{r})$  dazukommt).

Entwicklung des äußeren Potentials ergibt

$$U_w = \int d^3r \rho(\vec{r}) \left[ \phi_a(0) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \phi_a(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} x_i x_j \nabla_i \nabla_j \phi_a \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \right]$$

$$= q \phi_a(0) + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \phi_a \Big|_{\vec{r}=0} + \frac{1}{2} [Q_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij}] \cdot$$

$$\cdot \int d^3r \rho(\vec{r}) r^2 \nabla_i \nabla_j \phi_a \Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

$$\nabla_i \nabla_i \phi_a = \Delta \phi_a = -4\pi \rho_a = 0$$

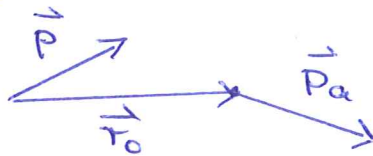
(da am Ursprung keine Ladungen sind, die  $\rho_a$  erzeugen).



⇒ Wechselwirkungsenergie:

$$U_w = q \Phi_a(0) - \vec{p} \vec{E}_a(0) + \frac{1}{2} Q_{ij} \nabla_i \nabla_j \Phi_a \Big|_{\vec{r}=0} + \dots$$

Daraus erhält man z.B. die potentielle Energie zweier wechselwirkender Dipole, z.B.  $\vec{p}$  im Ursprung, und  $\vec{p}_a$  bei  $\vec{r}_0$ :



Der Dipol  $\vec{p}_a$  erzeugt ein Potential

$$\Phi_a(\vec{r}) = \frac{\vec{p}_a (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

und die Wechselwirkungsenergie  $U_w = -\vec{p} \vec{E}_a(0)$  wird

$$U_w = \vec{p} \vec{\nabla} \Phi_a \Big|_{\vec{r}=0} = \frac{\vec{p} \vec{p}_a}{r_0^3} - \frac{3(\vec{p}_a \vec{r}_0)(\vec{p} \vec{r}_0)}{r_0^5}$$

Die Energie hängt demnach von der Orientierung relativ zum Feld am Ort des Dipols ab: analog verhalten sich in der Magnetostatik die Magnetnadeln im Erdfeld aus und induzieren so die Energie.

Die Kraft auf einen Dipol im Ursprung wird

$$\vec{F} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{E}_a(\vec{r}) = \int d^3r \rho(\vec{r}) \left[ \vec{E}_a(0) + \vec{r} \vec{\nabla} \vec{E}_a \Big|_{\vec{r}=0} + \dots \right]$$

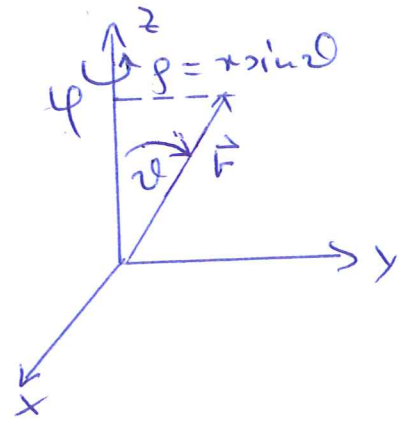
$$\Rightarrow \vec{F} = q \vec{E}_a(0) + (\vec{p} \vec{\nabla}) \vec{E}_a(0) + \dots$$

und das Drehmoment auf einen Dipol im Ursprung wird

$$\vec{H} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{r} \times \vec{E}_a(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}_a(0) + \dots$$

### 2.4.2 Multipol-Entwicklung in Kugelkoordinaten

Es soll die Laplace-Gleichung  $\Delta \phi(\vec{r}) = 0$  außerhalb einer beschränkten Ladungsverteilung in Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  gelöst werden.



$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Es ist

$$\Delta \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\Omega} \phi$$

$$\Delta_{\Omega} \phi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

( $\Delta_{\Omega} \equiv$  "Laplace-Operator auf der Kugel")  
(entfällt bei radial-symmetrischen Problemen)

Kugelflächenfunktionen:

Die Lösungen der Gleichung

$$\Delta_{\Omega} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

heißen Kugelflächenfunktionen  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  mit  $l=0, 1, 2, \dots$  und  $m = -l, -l+1, \dots, l$ . Für jedes  $l$  gibt es  $(2l+1)$

Kugelflächenfunktionen. Sie sind orthonormal:

$$(Y_{l'm'}, Y_{lm}) \equiv \int d\Omega \sin \vartheta d\vartheta d\varphi Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

und vollständig, d.h. ist eine Funktion  $f(\vartheta, \varphi)$  auf der Kugel differenzierbar und sind die Ableitungen beschränkt, so konvergiert die Entwicklung

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \text{ mit } a_{lm} = (f, Y_{lm}) = \int d\Omega' Y_{lm}^*(\Omega') f(\Omega')$$

Der Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und den zugeordneten Legendre-Polynomen ist

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

mit  $P_{lm}(x) \equiv \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$

Für die Kugelfunktionen gilt das Additionstheorem:

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = P_l(\cos \Theta) \quad [\Theta = \angle(\vec{r}', \vec{r})]$$

mit  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r r' \cos \Theta} = r \sqrt{1 + (\frac{r'}{r})^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \Theta}$

Wird die Multipolentwicklung  $(\Theta \equiv \vartheta \text{ für } \vec{r}'=0)$

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{\sqrt{1 + (\frac{r'}{r})^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos \Theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int d^3r' r'^l P_l(\cos \Theta) \rho(\vec{r}')$$

↑ Legendre-Polynome

Und mit dem Additionstheorem erhalten wir

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}$$

mit den Multipolmomenten in Kugelkoordinaten

$$q_{lm} \equiv \int d^3r' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(\vec{r}')$$

"sphärische Multipolmomente"

(siehe Aufg. 2, Blatt A3)

Der Zusammenhang zwischen den  $q_{lm}$  und dem charakteristischen Dipolmoment  $\vec{p}$  ist

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$q_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x \mp i p_y)$$

Die einfachsten Kugelflächenfunktionen sind

$$Y_{00}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad Y_{1\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \right), \quad Y_{2\pm 1}(\vartheta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{2\pm 2}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}$$

### 2.4.3 Lösung der Laplace-Gleichung

2.21

in Kugelkoordinaten [siehe Blatt 3 Aufg. 4 in kartesischen Koordinaten!]

$$\Delta \phi(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

Separationsansatz:  $\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y(\vartheta, \varphi)$

$$\begin{aligned} \text{mit } \Delta_r R(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (rR) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [R + rR'] = \frac{1}{r} [R' + R + rR''] = \frac{2}{r} R' + R'' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \phi = R'' Y + \frac{2}{r} R' Y + \frac{1}{r^2} R \Delta_\Omega Y = 0$$

Multiplikation mit  $r^2/(RY)$  ergibt

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = - \frac{1}{Y} \Delta_\Omega Y \equiv C$$

hängt nur von  $r$  ab      hängt nur von  $\Omega = (\vartheta, \varphi)$  ab

$\Rightarrow$  beide Terme müssen konstant sein, und sich zu Null addieren.

Lösung des Winkelanteils

$Y(\vartheta, \varphi) \equiv f(\vartheta) \cdot g(\varphi)$ ;  $\Delta_\Omega$  von p. 2.18; multipliziere mit  $\sin^2 \vartheta$

$$\Rightarrow C \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{Y} \Delta_\Omega f(\vartheta) g(\varphi) = 0$$

$$\underbrace{C \cdot \sin^2 \vartheta + \frac{\sin^2 \vartheta}{f(\vartheta)} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right]}_{= \text{const} \equiv \mu^2} + \underbrace{\frac{g''(\varphi)}{g(\varphi)}}_{= \text{const} = -\mu^2} = 0$$

$$\Rightarrow g''(\varphi) + m^2 g(\varphi) = 0$$

$$g(\varphi) = g_0 e^{\pm im\varphi}$$

Wegen der geforderten Eindeutigkeit der Lösung müssen die  $m$  ganze Zahlen sein,

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

V-Auswahl: Die Substitution  $x = \cos \vartheta$ ,  $f(\vartheta) = F(x)$

$$\frac{d}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{ergibt}$$

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)F'] + \left(c - \frac{m^2}{1-x^2}\right)F = 0$$

Die DGL hat nur dann für  $x = \pm 1$  reguläre Lösungen, falls  $c = \underline{l(l+1)}$  mit  $l = 0, 1, 2, \dots$  und  $|m| \leq l$ .

Lösungen sind die zugeordneten Legendre-Polynome, p. 2.19,

mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{+1} dx P_{lm}(x) P_{l'm'}(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Lösung der Radialgleichung:

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = l(l+1); \quad \text{mit } R(r) \equiv \frac{U(r)}{r}$$

$$\Rightarrow r^2 U'' = l(l+1) U; \quad \text{Ansatz } U(r) = r^a$$

$$\Rightarrow a(a-1)r^a = l(l+1)r^a \Rightarrow a = l+1 \vee a = -l$$

$\Rightarrow$  Lösung für  $R(r) = U(r)/r$ :

$$R(r) = C_1 r^l + C_2 r^{-l-1}$$

$C_1$ -Term regulär für  $r \rightarrow 0$   
singulär für  $r \rightarrow \infty$   
 $C_2$ -Term singulär für  $r \rightarrow 0$   
regulär für  $r \rightarrow \infty$

Die Gesamtlösung wird

$$\Phi\left(\frac{r}{r_0}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[ A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-l-1} \right] e^{im\varphi} P_l(\cos \vartheta)$$

#### 2.4.4 Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta \Phi(r, \vartheta, \varphi) = -4\pi \rho(r, \vartheta, \varphi)$$

Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\rho(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{lm} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Einsetzen in die Poisson-Fl. ergibt nach Multiplikation mit  $r^2$  die inhomogene DGL

$$\left( r^2 R'_{lm}(r) \right)' - l(l+1) R_{lm}(r) = -4\pi r^2 \rho_{lm}(r)$$

Lösung zunächst für einen Spezialfall

$$r^2 \rho(r) \propto \delta(r - r')$$

Für  $r < r'$  sollen die Lösungen regulär im Ursprung sein:

$$R^< = c_1 r^l$$

Für  $r > r'$  sollen die Lösungen regulär für  $r \rightarrow \infty$  sein:

$$R^> = c_2 r^{-l-1}$$

Es gilt:

(a) Ist  $\phi(r)$  stetig bei  $r=r'$ , dann ist auch  $R(r)$  stetig mit

$$C_1 (r')^l = C_2 (r')^{-l-1} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = (r')^{-2l-1}$$

(b)  $R(r)$  darf einen "Knick" haben, d.h. die Theta-Fkt (Heaviside-Fkt) enthalten:

$$\Theta(r-r') = \begin{cases} 0, & r-r' < 0 \\ 1, & r-r' > 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{+\infty} dr' f(r') \Theta'(r-r') = f(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Theta'(r-r') = \delta(r-r')} \\ (\text{siehe 2. Präsenzübung})$$

Daraus konstruieren wir für die Radialgleichung den Lösungsansatz

$$R(r) = C_2 \left[ \underbrace{r^{-l-1}}_{r > r'} \Theta(r-r') + \frac{r^l}{(r')^{2l+1}} \underbrace{\Theta(r'-r)}_{r < r'} \right]$$

soll Lösung sein von

$$\boxed{2rR' + r^2R'' - l(l+1)R = -4\pi \delta(r-r')}$$

$\Rightarrow$  Einsetzen und ausdifferenzieren mit partieller Integration;  
beachte  $\delta(r-r') = \delta(r'-r)$ ;  $\delta'$ -Terme fallen gegen  $\frac{d}{dr}$  Terme weg.  
In den  $\delta$ -Funktionskurven: wg.  $\delta(r-r')$  setze  $r=r'$

$$\Rightarrow C_2 (2l+1) (r')^{-l} = 4\pi$$

$$C_2 = \frac{4\pi}{2l+1} (r')^l$$

$$\Rightarrow R_{\text{ren}}(r, r') = \frac{4\pi}{2l+1} \left[ \frac{(r')^l}{r^{l+1}} \Theta(r-r') + \frac{r^l}{(r')^{l+1}} \Theta(r'-r) \right]$$



und die allgemeine Lösung wird

$$R_{lm}(r) = \int_0^{\infty} dr' (r')^2 \rho_{lm}(r') R_{lm}(r, r')$$

so dass

$$\begin{aligned} \Phi(r, \vartheta, \varphi) &= \sum_{l,m} R_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \int_0^{\infty} dr' r'^2 \frac{(r')^l}{r^{l+1}} \rho_{lm}(r') \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

## 2.5 Dielektrika

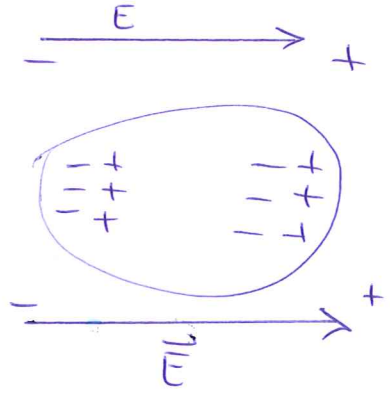
Materie besteht aus positiv und negativ geladenen Teilchen - Protonen, Elektronen - sowie den (neutralen) Neutronen. Die mikroskopischen Ladungen gleichen sich in der Regel im makroskopischen Bereich aus, so dass die Materie nach außen hin fast oder völlig neutral ist.

Die Ladungen bewegen sich dabei mit hoher Frequenz um ihre Ruhelagen, sofern die Temperatur nicht in der Nähe des absoluten Nullpunktes ist.

In Leitern bewegen sich Ladungen frei. In der Elektrostatik gilt in einem Leiter  $\vec{E} = 0$ , da sich die Ladungen sonst wegen  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  bewegen ( $\sigma \equiv$  Leitfähigkeit).

Dielektrika sind schwach- oder nichtleitende, nicht-metallische Substanzen, deren Ladungsträger i.a. nicht frei beweglich sind; dies können Gase, Flüssigkeiten oder Festkörper sein. Sie sind i.a. unmagnetisch.

In Isolatoren können Ladungen nicht wandern, aber verschoben werden: Ein äußeres  $\vec{E}$ -Feld erzeugt Dipole durch Verschiebung der Ladungsschwerpunkte von Ionen und Elektronenhüllen.



Die Gesamtladung verschwindet weiterhin, aber im Volumen  $V$  wird eine Dipaldichte erzeugt, die bestimmt ist durch

$$\frac{1}{V} \times \text{Anzahl der Dipole} \times \text{mittleres Dipolmoment.}$$

Bereits existierende Dipole von Molekülen oder Molekülgruppen richten sich gegen die thermische Bewegung im  $\vec{E}$ -Feld aus;

Das  $\vec{E}$ -Feld bewirkt die Verschiebung von Ladungen  $q_i$  von  $\vec{r}_i$  nach  $\vec{r}_i + \vec{a}_i$ :

Dipole  $\vec{p}_i = q_i \vec{a}_i$  werden induziert, die Materie wird polarisiert; die zugehörige Ladungsverteilung wird

$$\rho_p(\vec{r}) = - \sum_i (\vec{p}_i \cdot \vec{\nabla}) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (*)$$

und mit der Dipaldichtedichte (Polarisation)

$$\vec{P}(\vec{r}) \equiv \frac{\sum \vec{p}_i}{V} \quad \text{ist} \quad (\text{benutze } \vec{\nabla}(\vec{A}\varphi) = \vec{A}\vec{\nabla}\varphi + \varphi\vec{\nabla}\vec{A})$$

$$\begin{aligned} \rho_p(\vec{r}) &= - \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \dots \\ &= - \vec{\nabla} \cdot \int d^3r' \vec{P}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \end{aligned}$$

(\*) Punkt-dipol, das entsteht, wenn ein ausgedehnter Dipol ohne Monopolmoment auf einen Punkt bei  $\vec{r}_i$  verkleinert wird, ohne dabei das Dipolmoment zu ändern.

Polarisations-Ladungsdichte

Die Ladungsdichte hat also außer dem Anteil frei beweglicher Ladungen  $\rho_f(\vec{r})$  auch eine sog.

Polarisations-Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}) = \rho_f(\vec{r}) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

Die Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  beschreibt die Antwort des Mediums auf ein anregendes elektrisches Feld  $\vec{E}$ . Im Medium wird dadurch die Feldstärke  $\vec{E}$  zu dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi \vec{P}(\vec{r})$$

In der Maxwell-Gleichung (die Quellen von  $\vec{D}$  sind die freien Ladungen  $\rho_f$ )

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho_f(\vec{r})$$

sind dabei  $\vec{D}$  und  $\rho_f$  als (über makroskopische Volumina) gemittelte Größen aufzufassen.

Wegen des vorausgesetzten (s. Einleitung) linearen Zusammenhangs zwischen  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$ ,

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{folgt} \quad (\epsilon = \text{relative Dielektrizitätskonstante; im Vakuum ist } \epsilon=1, \vec{E}=\vec{D})$$
$$\vec{E} + 4\pi \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi} \vec{E} =: \chi_e \vec{E}$$

dh. ein linearer Zusammenhang zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{E}$  über eine dielektrische Suszeptibilität

$$\chi_e = \frac{\epsilon-1}{4\pi}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi \chi_e$$

$$\text{Aus } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f, \quad \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_V d^3r \rho_f = 4\pi q_f$$

folgt mit dem Satz von Gauß

$$\int_A dA \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi q_f$$

dh. der Fluss des dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche  $A$  eines Volumens  $V$  ist gleich

$4\pi \times$  der frei beweglichen Ladung in dem betrachteten

Volumen,

Bemerkungen zu  $\vec{P}$ ,  $\chi_e$ ,  $\epsilon$ :

- Nur für isotrope Materialien sind  $\epsilon$  und  $\chi_e$  Skalare; für anisotrope Materialien sind es Tensoren.  $\epsilon$  lässt sich mikroskopisch aus der Polarisierbarkeit der Moleküle ableiten
- Bei Ferroelektrika ist die Polarisation  $\vec{P}$  bereits bei  $\vec{E} = 0$  von Null verschieden, wird aber meist durch Oberflächenladungen kompensiert. Äußere Veränderungen (wie Druck bei der Piezoelektrizität von Quarz) können sie in Erscheinung treten lassen.
- Die Dimensionen von  $\vec{P}$ ,  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  sind im Gauß-System gleich, die Einheiten sind  $[\text{dyn} \cdot \text{cm}]$ .  
Im SI-System ist  $[E] = \frac{V}{m}$ ;  $[D] = [P] = \frac{As}{m^2}$
- Die  $\chi_e$  unterscheiden sich in den beiden Maßsystemen um  $4\pi$ , die  $\epsilon$  sind identisch.
- Werte für  $\epsilon$ : Luft: 1.0005; Glas: 5-8; Alkohol: 26

= Gesetz von Clausius und Mosotti.

Grenzflächen zweier Dielektrika: Zusammenfassung der Formeln p. 2.26-2.28

Seien  $\epsilon$  und  $\chi_e$  Konstanten.

Für die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  gilt wie auf S. 2.28

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f}$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = 4\pi \int_V \rho_f dV = 4\pi q_f$$

und analog für das elektrische Feld  $\vec{E}$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_A \vec{E} d\vec{A} = 4\pi (q_f + q_p)$$

↑ Polarisationsladung,

Mit der Polarisations-Ladungsdichte  $q_p = \int_V \rho_p dV$

$$\boxed{\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} + 4\pi \vec{P}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi \rho_p$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi (\rho_f + \rho_p)}$$

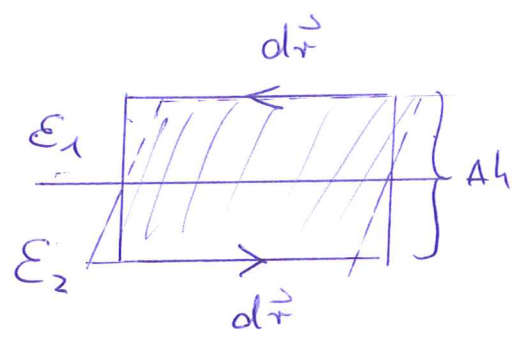
sowohl die freien als auch die durch Polarisation erzeugten / induzierten Ladungen liegen als Quellen zu  $\vec{E}$  bei.

Betrachte nun eine Grenzfläche zwischen

zwei Medien mit Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .

Zwischen beiden Dielektrika müssen die Komponenten des  $\vec{E}$ -Feldes tangential

zu Grenzfläche übereinstimmen:



Aus der Maxwell-Gleichung

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , und mit dem

Stokeschen Satz folgt

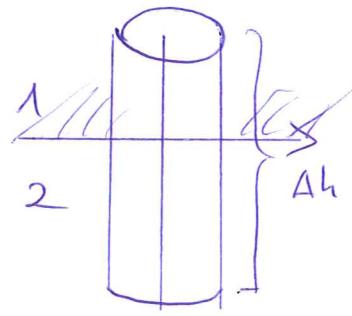
$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = 0 = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_{1t} - E_{2t}$

Grenzfläche durch eine Linie eingeschrieben die oberhalb und unterhalb parallel zur Fläche verläuft, und deren Höhe  $\Delta h$  beliebig klein wird.

$\Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$

Die Tangentialkomponenten des  $\vec{E}$ -Feldes sind an der Grenzfläche stetig.

Normal zur Grenzfläche legt man eine "Gaußsche Dose" in die Fläche:



Sind auf der Grenzfläche keine frei beweglichen Ladungen, gilt

$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \Rightarrow \oint_A d\vec{A} \cdot \vec{D} = 0$

Rückt man mit  $\Delta h \rightarrow 0$  die Oberflächen an die Grenzfläche 1-2 heran, kann das Flächenintegral von  $\vec{D}$  mit 0 bleiben, wenn die Normalkomponenten von  $\vec{D}$  an der Grenzfläche gleich sind:

$D_{1n} = D_{2n}$

Ist eine Flächenladung mit  $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$  auf der Grenzfläche, wird analog

$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma$

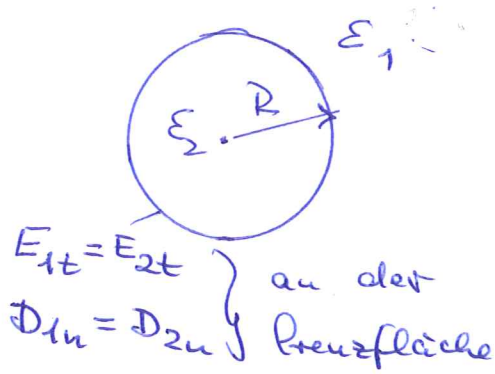
[cf. Blatt 4, Aufg. 3]

Für die Polarisation gilt entsprechend an der Grenzfläche:

$$4\pi (P_{2n} - P_{1n}) = E_{1n} - E_{2n} \quad \text{Normalkomponente}$$

$$4\pi (P_{1t} - P_{2t}) = D_{1t} - D_{2t} \quad \text{Tangentiale Komponente}$$

Beispiel dielektrische Kugel:  $\vec{E}$ -Feld innen/außen



eine Kugel mit Radius  $R$ , Dielektr. konst.  $\epsilon_2$  sei in ein Dielektrikum mit  $\epsilon_1$  eingefügt.

Das  $\vec{E}$ -Feld im Dielektrikum ① sei in großer Entfernung homogen,

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}_1 = E_1 e_z, \quad r \gg R$$

$$\Rightarrow \text{dort ist das Potential } \phi(\vec{r}) = -\vec{E}_1 \cdot \vec{r} = -E_1 r \cos \theta$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = f(r) \cos \theta$$

Die Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = 0$$

$$\Delta (f(r) \cos \theta) = 0$$

ist eine Linearkombination aus  $f(r) = r$  (homogenes Feld) und  $f(r) = 1/r^2$  (Dipolfeld). Am Ursprung sitzt jedoch kein makroskopischer Dipol.

$\Rightarrow$  Lösungsansatz:

$$\phi(\vec{r}) = \cos \theta \begin{cases} -E_2 r, & r \leq R \\ -E_1 r + P/r^2, & r \geq R \end{cases}$$

An der Grenzfläche gilt

$$E_{1t} = E_{2t} \quad ; \quad D_{1n} = D_{2n}$$

$$\Rightarrow -E_1 R + \frac{P}{R^2} = -E_2 R \quad (1)$$

$$D_n = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 \left( E_1 + \frac{2P}{R^3} \right) = \epsilon_2 E_2 \quad (2)$$

Die beiden Gleichungen für  $E_1, E_2$  ergeben (1), (2)

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{3\epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} E_1} \quad (\Rightarrow \text{für } \epsilon_1 = \epsilon_2 = 1: E_1 = E_2) \checkmark$$

$$\Rightarrow P = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} R^3 E_1$$

so dass die Polarisation im Inneren der Kugel das elektrische Feld um

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = -\frac{4\pi}{3} \vec{P}} \text{ vermindert}$$

Ist eine dielektrische Kugel im Vakuum, gilt mit

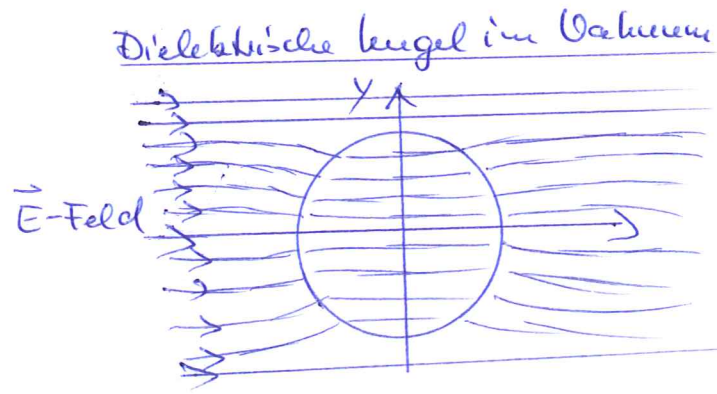
$$\epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 \equiv \epsilon :$$

$$\text{innhalb: } E_2 = \frac{3}{2+\epsilon} E_1 \quad ; \quad P = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} R^3 E_1 \text{ außerhalb}$$

$$(E_2 < E_1!)$$

und eine Hohlkugel (mit  $\epsilon_2 = 1$ ) im Dielektrikum  $\epsilon_1 \equiv \epsilon$  ergibt

$$E_2 = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon} E_1$$





## 2.6 Elektrizität auf Leitern

Im Inneren von Leitern ist  $\vec{E}_i = 0$ , da sonst die Ladungen verschoben würden

⇒ Das Potential im Leiter ist konstant,

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \phi_i = \text{const}} \text{ im Leiter}$$

Im Außenbereich ist das Potential durch die Lösung der Poisson-Gleichung bestimmt,

$$\boxed{\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})} \quad (\rho = \rho_f + \rho_f)$$

oder mit der Dichte freibeweglicher Ladungen  $\rho_f$

$$\vec{\nabla} [\epsilon(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi(\vec{r})] = -4\pi \rho_f(\vec{r})$$

An der Leitoberfläche

ist  $E_t(\vec{r}) = 0$ , da

die Feldstärke im Inneren

des Leiters verschwindet. Auf der

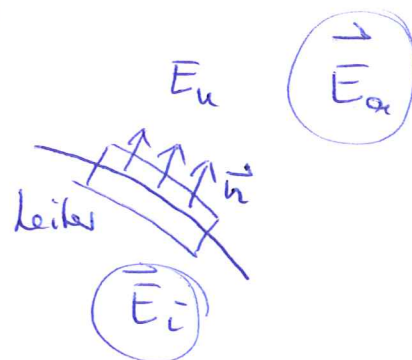
Oberfläche werden Ladungen induziert; die

Oberflächenladungsdichte ist  $\sigma(\vec{r})$ . Die

Ladungen sind über eine schichtdicke  $l$  verschmeert.

Integration über ein Oberflächenelement ergibt

$$\int d\vec{A} \vec{E}_a(\vec{r}) = 4\pi q = 4\pi \int d\vec{A} \sigma(\vec{r})$$



⇒ Feldstärke an der äußeren Oberfläche:

$$\vec{E}_a(\vec{r}) = 4\pi \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{n}$$

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} = 4\pi \sigma(\vec{r}) \quad \text{"v. Neumannsche Randbedingung"}$$

Die Ladungsdichte  $\sigma$  an der Oberfläche setzt sich dabei zusammen aus dem frei beweglichen Anteil  $\sigma_f$  auf der Leitwoelfläche, und der Polarisationsladungsdichte  $\sigma_p$  auf dem Dielektrikum,

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_f(\vec{r}) + \sigma_p(\vec{r}) \quad \text{mit}$$

$$\vec{D}_a(\vec{r}) = 4\pi \sigma_f(\vec{r}) \cdot \vec{n}, \quad \text{und mit} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$\parallel$   $4\pi \sigma_f$   $\parallel$   $4\pi (\sigma_f + \sigma_p)$

folgt

$$\sigma_f = \epsilon (\sigma_f + \sigma_p), \quad \text{oder}$$

$$\sigma_p = \sigma_f \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)$$

 Polarisations-Ladungsdichte

Demnach verschwindet die Polarisationsladungsdichte auf Leitern an der Oberfläche im Vakuum,

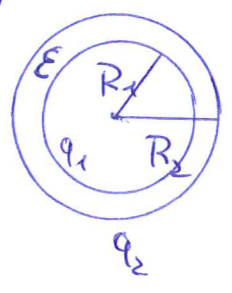
$$\sigma_p \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 1} 0$$

# 2.7 Kapazität; Kugelkondensator

Prinzip: - Leiter, eingebettet ins Vakuum oder in Dielektrika  
 - keine frei beweglichen Ladungsdichten außerhalb des Leiters,  $\rho_f = 0$ ; frei bewegliche Ladungen auf den Leitern.

## Kugelkondensator:

Zwei konzentrische leitende Kugeln,  
 $R_1 < R_2$ , Ladungen  $q_1, q_2$



im Außenraum:

$$\phi(r) = \frac{q_1 + q_2}{r}, \quad r \geq R_2$$

Zwischen den Kugeln:

$$\phi(r) \propto \frac{q_1}{\epsilon \cdot r}$$

bei  $r = R_2$  muss das Potential stetig sein,

$$\phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon r} - \frac{q_1}{\epsilon R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Im Innenraum ist das Potential konstant,

$$\phi(r) = \frac{q_1}{\epsilon R_1} - \frac{q_1}{\epsilon R_2} + \frac{q_1 + q_2}{R_2}, \quad r \leq R_1$$

Daraus folgen die Ladungen als Funktionen der Potentiale  $\phi_i = \phi(R_i), i=1,2$ :

$$q_1 = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\phi_1 - \phi_2)$$

$$q_2 = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\phi_2 - \phi_1) + R_2 \phi_2$$

Der Zusammenhang zwischen Ladung und Potential wird durch die Kapazitätskoeffizienten  $C_{ij}$  gegeben,  

$$\sum_j C_{ij} \phi_j = q_i.$$

Für ein neutrales System mit  $q = q_1 = -q_2$  lässt sich  $q$  durch die Potentialdifferenz ausdrücken,

$$\boxed{q = C (\phi_1 - \phi_2)} \quad \text{mit der Kapazität } C,$$

$$\text{bzw. } \boxed{C = \frac{q}{U}} \quad \text{mit der Spannung } U.$$

Die Dimension ist im Gauß-System

$$[C] = \frac{[\text{Ladung}]}{[\text{Spannung}]} = \frac{[P][r^3]}{[E][r]} = \frac{\text{Vol} \mu\text{cm}}{\text{Vol} \mu} = \text{cm} = [\text{Länge}]$$

im SI:  $\times 4\pi\epsilon_0$ ;  $[C] = \text{Farad}, F$ ; Picofarad in prakt. Anwendungen.

Beim „geerdeten“ Kugellkondensator mit  $\phi_2 = 0$  wird

$$\phi_1 = \frac{q_1}{\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \quad \text{wg. } C \propto \epsilon \text{ lässt sich die Kapazität durch ein Dielektrikum mit großem } \epsilon \text{ wesentlich erhöhen. (siehe Blatt 4, Aufg. 3)}$$

Plattenkondensator:

Ladung  $q$  auf Platten der Fläche  $A$  im Abstand  $d$ .

$$\text{Es gilt } \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi \rho_f \Rightarrow \int d^3 \nabla \cdot \vec{D} = \int d^3 \rho_f = 4\pi q_f$$

$\Rightarrow$  Die freibeweglichen Ladungen

$$= \int_A d\vec{A} \cdot \vec{D}(\vec{r})$$

$q_f$  erzeugen einen Fluss  $D \cdot A = 4\pi q_f$ .

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist

$$\phi = \frac{D}{\epsilon} \cdot d = \frac{4\pi d}{\epsilon \cdot A} \cdot q_f$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{q_f}{\phi} = \frac{\epsilon \cdot A}{4\pi \cdot d}}$$

(Dasselbe Ergebnis folgt aus dem Kugellkondensator mit  $R_2 = R_1 + d$ ,  $d = \text{const.}$ ,  $R_1 \rightarrow \infty$ :  $[C \propto A]$ )

## 2.8 Feldenergie in Materie

Mit der Maxwell-Gleichung in Materie

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 4\pi \rho_f(\vec{r})$$

wird die Feldenergie (cf. 2.3, p. 2.6)

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r})) \phi(\vec{r})$$

mit  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} \phi) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} \phi$ ; Satz v. Gauß anwenden,

$$\Rightarrow U = \frac{1}{8\pi} \int_A d\vec{A} \cdot \vec{D}(\vec{r}) \phi(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r}) \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \phi(\vec{r})}_{-\vec{E}(\vec{r})}$$

Sind alle Ladungen  $\rho_f$  in einer Kugel vom Radius  $R$  eingeschlossen, gilt für  $R \rightarrow \infty$  (Beitrag der Ladungsdichte  $\rho$  zum Potential  $\phi$ )

$$\phi \propto \frac{1}{R}; \quad \vec{D} \propto 1/R^2; \quad \int d\vec{A} \cdot \vec{D} \phi \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0$$

und die elektrostatische Energie in Materie wird

$$U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Im Vakuum mit  $\epsilon = 1$ ,  $\vec{D} = \vec{E}$  gilt dies in dem bekannten Ausdruck über,

$$U^{\text{vac}} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2(\vec{r}), \quad \text{siehe 2.3, p. 2.6.}$$

Die Kraft auf dielektrische Körper

im  $\vec{E}$ -Feld wird für einen Dipol  $\vec{p}$ :

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}}$$

Das Dipolmoment  $\vec{p}$  folgt durch Integration der Dipolmomentdichte (Polarisation)  $\vec{P}$  über das Volumen (wg.  $\vec{p} \equiv \frac{\sum p_i}{V}$ ),

$$\vec{p} = \int_V d^3r \vec{P}(\vec{r})$$

Sofern das  $\vec{E}$ -Feld im Volumen  $V$  konstant ist, wird das mit  $\vec{P} = \chi_e \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E}$ :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \cdot V \cdot \vec{E}}$$

und man erhält für die Kraft mit i.a.  $\vec{r}$ -abhängigem  $\vec{E}(\vec{r})$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \cdot V \left[ (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r}) \right] = \\ &= \dots \text{ (siehe Vektoralgebra!) } = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} V \vec{\nabla} E^2(\vec{r}) \end{aligned}}$$

wobei als Folge der Anwendung der Produktregel  

$$\left[ \text{über } \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = 0 \right]$$

$$\frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E} + (\vec{\nabla} \vec{E}) \cdot \vec{E}]$$

ein zusätzlicher Faktor  $\frac{1}{2}$  auftaucht.

Beispiel: Dielektrischer Körper im Coulomb-Feld,

$$\vec{E}(\vec{r}) = q \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla} E^2(\vec{r}) = -4q^2 \frac{\vec{r}}{r^6} \propto \vec{F}$$

Der Körper wird in das elektrische Feld hineingezogen mit  $\vec{F} \propto -\frac{\vec{r}}{r^6}$ , so dass die Energie vermindert wird.

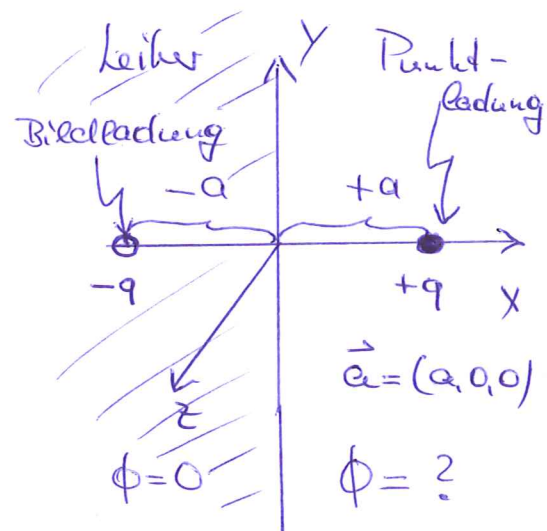
## 2.9 Bildladungen

Die Methode der Bild- oder Spiegel Ladungen (s. Blatt 5, Aufg. 1 u. 2) verwendet man, wenn Punkt Ladungen zusammen mit Leitern betrachtet werden, die - durch Erdung ( $\phi=0$ ) oder eine Spannungsquelle - auf konstantem Potential gehalten werden.

Das Potential soll in dem Raumgebiet berechnet werden, das nicht von Leitern belegt ist.

Zur Lösung führt man eine (fiktive) "Bild Ladung" außerhalb des Gebietes ein, in dem das Potential berechnet werden soll, und simuliert so die Randbedingungen.

Beispiel: Ein Halbraum ist durch einen Leiter mit  $\phi=0$  gefüllt. Im leeren Halbraum ist eine Punkt Ladung  $q$ . Berechne das Potential im Halbraum mit der Punkt Ladung!



Die Punktladung wird an der Leiterwand "gespiegelt"; die Bildladung hat das umgekehrte Vorzeichen.

Für das (mit Bildladung symmetrische) Potential machen wir den Ansatz  $\propto \frac{q}{\text{Abstand zur Ladung}}$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r}-\vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r}+\vec{a}|}$$

Auf dem Leiterraum  $\vec{r}_w = (0, y_w, z_w)$  verschwindet das Potential  $\Rightarrow$  Forderung:

$$\phi(\vec{r}_w) \stackrel{!}{=} 0 \quad ; \quad \phi(\vec{r}_w) = \frac{q}{|\vec{r}_w-\vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r}_w+\vec{a}|} = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{r}_w-\vec{a}| = |\vec{r}_w+\vec{a}|$$
$$|(-a, y_w, z_w)| = |(a, y_w, z_w)|$$

wg.  $| -a | = | a | = a$  ist dies stets erfüllt  $\Rightarrow$  Potentialansatz ok.

$\Rightarrow$   $\vec{E}$ -Feld:

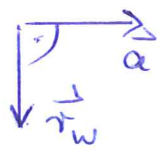
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = q \left[ \frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{a}}{|\vec{r}+\vec{a}|^3} \right]$$

Au der Leiteroberfläche ist  $|\vec{r}_w-\vec{a}| = |\vec{r}_w+\vec{a}|$

$$\vec{E}(\vec{r}_w) = \frac{q}{|\vec{r}_w-\vec{a}|^3} [\vec{r}_w-\vec{a} - \vec{r}_w-\vec{a}] = -2 \frac{q\vec{a}}{|\vec{r}_w-\vec{a}|^3} \propto \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \propto \vec{a} \perp \vec{r}_w \Rightarrow E_t = 0 \Rightarrow E_y = E_z = 0$$

auf dem Rand



In Kugelkoordinaten ist  $R = \sqrt{a^2 + y_w^2 + z_w^2}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}_w) = -2 \frac{q \cdot \vec{a}}{R^3} \Rightarrow \sigma = -\frac{q \cdot a}{2\pi R^3}$$

Flächenladungsdichte:  
 $E_x = 4\pi \sigma$  ;  
 $\int d\vec{A} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi q$

Integration über die Leitfläche ergibt die Bildladung:

$$\int \sigma d\vec{A} = -\frac{q a}{2\pi} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(\sqrt{a^2+r^2})^3} = -q \quad \left( \text{mit } \int_0^\infty r dr \frac{1}{(\sqrt{a^2+r^2})^3} = \frac{1}{a} \right)$$





## 2.10 Poincaré Satz und Poincaré Funktion

Beide werden benutzt, um Randwertprobleme insbesondere bei Metallen zu lösen.

Beispiel: Für eine geschlossene metallische Oberfläche im Volumen  $V$  soll das Potential im umgebenden Raum unter bestimmten (s.u.) Randbedingungen berechnet werden durch Lösen der Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$$

(1) Dirichletsche Randbedingung:

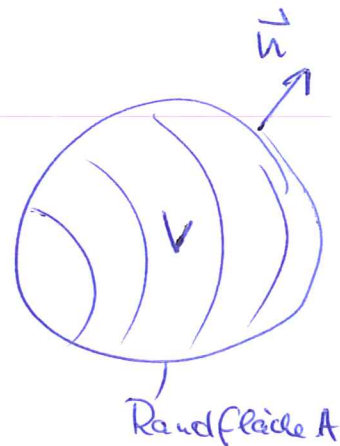
Das Potential ist auf der Oberfläche  $A$  vorgegeben,  $\phi(\vec{r}) = \phi_0$  auf  $A$  (insbes.  $\phi_0 = 0$ )

(2) von Neumannsche Randbedingung:

Die Flächenladung ist auf der Oberfläche vorgegeben,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_A = -4\pi \sigma(\vec{r})$$

$$\text{mit } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$$



Eine partielle Lösung der Poisson-Gleichung im Volumen  $V$  ist

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|};$$

dazu kommt die Lösung der homogenen Gleichung (Laplace-gl.)

Damit lassen sich die Randbedingungen (1) oder (2) erfüllen.

Die Eindeutigkeit der Lösung lässt sich mit Hilfe der Greenschen Identität zeigen:

Seien zwei Potentiale  $\phi_1(\vec{r})$ ,  $\phi_2(\vec{r})$  gegeben.

Es ist

$$\vec{\nabla} \left[ \underbrace{\phi_1(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_2(\vec{r})}_{\equiv \vec{a}(\vec{r})} \right] = \phi_1(\vec{r}) \Delta \phi_2(\vec{r}) + (\vec{\nabla} \phi_1(\vec{r})) \vec{\nabla} \phi_2(\vec{r}).$$

$\int_V d^3r$

Mit dem Satz von Gauß,  $\oint_A d\vec{A} \vec{a}(\vec{r}) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \vec{a}(\vec{r})$

folgt die sog. erste Greensche Identität,

$$\oint_A d\vec{A} \phi_1(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_2(\vec{r}) = \int_V d^3r [\phi_1 \Delta \phi_2 + \underbrace{(\vec{\nabla} \phi_1) \vec{\nabla} \phi_2}_{\text{symmetrisch in } \phi_1 \phi_2}]$$

$$\oint_A dA \phi_1(\vec{r}) \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{n} \vec{\nabla} \phi$$

Vertausche  $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$  und subtrahiere die Gleichungen  
 $\Rightarrow$  der symmetrische Term fällt weg

$\Rightarrow$  Greenscher Satz:

$$\oint_A dA \left[ \phi_1(\vec{r}) \frac{\partial \phi_2(\vec{r})}{\partial n} - \phi_2(\vec{r}) \frac{\partial \phi_1(\vec{r})}{\partial n} \right] = \int_V d^3r [\phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1]$$

Damit lässt sich für beide Randbedingungen die Eindeutigkeit der Lösung zeigen.

# Eindeutigkeit der Lösung

Ann.:  $\exists$  2 Lösungen  $\phi_1, \phi_2$  mit  $u = \phi_2 - \phi_1 \neq 0$  i.a.  
(= 0 auf dem Rand)

$u$  soll die Laplace-Gl.  $\Delta u = 0$  erfüllen, und die entsprechende RB wie  $\phi_1, \phi_2$

$\Rightarrow$  Da die erste Green'sche Identität für allgemeine Potentiale gilt, muss sie auch für  $\phi_1 \equiv \phi_2 \equiv u$  gelten; wg.  $\Delta u = 0$  ist

$$\oint_A dA u(\vec{r}) \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n} = \int_V d^3r (\vec{\nabla} u(\vec{r}))^2 \stackrel{!}{=} 0$$

RB(1) RB(2) sei vorgegeben als 0

$\Rightarrow [\vec{\nabla} u(\vec{r})]^2 = 0 \Rightarrow u = \text{const} \equiv 0$  für RB(1),  
denn auf dem Rand ist  $u = 0$   
 $\Rightarrow \phi_1 = \phi_2$ : Die Lösung ist eindeutig.

Auch für die von Neumann'sche RB(2) lässt sich  $\phi_1 = \phi_2$  zeigen, jedoch kann man i.a. nicht beide Randbedingungen (1) und (2) gleichzeitig erfüllen ("Cauchy-Randbedingungen").

In der Poisson-Gleichung mit einer Einheits-Punktladung am Ort  $\vec{r}$  ist die Greensche Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  definiert durch

$$\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Damit lassen sich die beiden Randbedingungen formulieren als

$$(1) \quad G_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{für } \vec{r}' \text{ auf dem Rand } A \\ \text{(denn das Potential soll dort } = 0 \text{ sein)}$$

$$(2) \quad \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} = -4\pi \sigma = -\frac{4\pi}{A} \quad \text{für } \vec{r}' \in A \\ \text{(Normalenvektor zeigt aus der Fläche heraus)}$$

Im Fall (1) wenden wir mit  $\phi_1 = \phi$ ,  $\phi_2 = G$  den Greenschen Satz an:

$$\oint_A dA' \left[ \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} - \underbrace{G_D(\vec{r}, \vec{r}')}_{=0} \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right] =$$

$$= \int_V d^3r' \left[ \phi(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} G_D(\vec{r}, \vec{r}') - G_D(\vec{r}, \vec{r}') \Delta_{\vec{r}'} \phi(\vec{r}') \right]$$

$$= -4\pi \phi(\vec{r}) - \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') [-4\pi \rho(\vec{r}')] \equiv 0$$

so dass sich das  $\overset{V}{\text{Potential}} \phi(\vec{r})$  mit Hilfe der Greenschen Funktion (welche die Randbedingungen berücksichtigt), berechnen lässt als

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r' G_D(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' \phi(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

Die Greensche Funktion ist symmetrisch:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$$

Beweis mit dem Greenschen Satz,

$$\phi_1 \equiv G(\vec{r}'', \vec{r}), \quad \phi_2 = G(\vec{r}'', \vec{r}')$$

Das Oberflächenintegral ist Null wg. der Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \int_V d^3r'' [\phi_1 \Delta \phi_2 - \phi_2 \Delta \phi_1] \\ &= -4\pi \int d^3r'' G(\vec{r}'', \vec{r}) \delta(\vec{r}'' - \vec{r}') \\ &\quad + 4\pi \int d^3r'' G(\vec{r}'', \vec{r}') \delta(\vec{r}'' - \vec{r}) \\ &= -4\pi [G(\vec{r}', \vec{r}) - G(\vec{r}, \vec{r}')] \Rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}) \end{aligned}$$

Bei Translationsinvarianz gilt ferner

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

Für die Neumannschen Randbedingungen (2) gilt analog zu (1) mit dem Greenschen Satz

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} + \oint_A dA' \phi(\vec{r}') \frac{1}{A'} \end{aligned}$$

$$-\frac{4\pi}{A'} = \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \downarrow$$

Der Normalenvektor  $\vec{n}'$  zeigt in das Metall hinein; auf der Oberfläche ist

$$\left. \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \right|_{\vec{r}' \in A} = 4\pi\sigma \quad (\text{positives Vorzeichen!})$$

Wird die Fläche  $A$  sehr groß, " $A \rightarrow \infty$ ",  
entfällt der dritte Term des Potentials  
bei v. Neumannschen RB wg.  $\propto 1/A$ :

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_A dA' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} \\ &= \int_V d^3r' G_N(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') + \oint_A dA' \sigma(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}')\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  auch im v. Neumannschen Fall lässt sich das  
Potential explizit berechnen.

Mit dem Satz v. Gauß ist

$$\int_V d^3r' \Delta_{\vec{r}'} G_N(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi = \oint_A dA' \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot G_N(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\text{mit } dA' \vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot G_N(\vec{r}, \vec{r}') = dA' \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G_N(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \neq 0 \quad \text{auf dem Rand,}$$

$$\text{d.h. die Annahme } G_N(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \wedge \frac{\partial G_N}{\partial n'} = 0$$

auf dem Rand führt zu einem

Widerspruch. Bei willkürlich vorgegebenen

Werten von  $\phi$  und  $\partial\phi/\partial n$  („Cauchysches Randwertproblem“) hat die Poisson-Gleichung

keine Lösung bei geschlossener Fläche. (Offene Fläche siehe Sommerfeld, „Partielle Differentialgleichungen der Physik“, Kap. II).

### 3. Magnetostatik

In der Magnetostatik untersuchen wir magnetische Phänomene, die durch zeitlich konstante Ströme entstehen: Die Magnetfelder sind stationär,  $\dot{\vec{B}} = 0$ , sowie  $\dot{\vec{D}} = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$ .

Die Maxwell-Gleichungen werden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

mit  $\vec{j} \equiv \vec{j}_A$  Ladungsstrom, da der Verschiebungsstrom wg  $\dot{\vec{D}} = 0$  verschwindet: Der Ladungsstrom induziert das Magnetfeld. Das Magnetfeld ist quellfrei:  $\nexists$  magnet. Monopole

Im Vakuum mit  $\mu = 1$ ,  $\vec{H} = \vec{B}$  wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$\Rightarrow$  das Magnetfeld hat nur dort eine Rotation, wo die Ladungsstromdichte nicht verschwindet: Außerhalb von Leitern ist  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ , so dass dort  $\vec{B}_{\text{außen}} = \vec{\nabla} \Phi_M$ , d.h. Gradient eines skalaren Potentials ist; im Leiter gibt es nicht, so dass eine andere Formulierung des Potentials notwendig ist: ein Vektorpotential.

Da die Divergenz einer Rotation verschwindet, lässt sich das Magnetfeld als Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  schreiben,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{da} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0.$$

Ferner können wir setzen

$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$  mit einem skalaren Feld  $\chi$ , ohne dass sich das Magnetfeld ändert: Spezialfall einer Eichtransformation, siehe 3.4.

Die Quellsfreiheit des Magnetfeldes wird in integraler Form mit dem Poynting'schen Satz,

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r = \oint_F d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

d.h. es gehen genauso viele magnet. Feldlinien durch die Fläche  $F$ , die ein Volumen  $V$  umschließt, heraus wie herein: Feldlinien beginnen oder enden nicht im Raum.

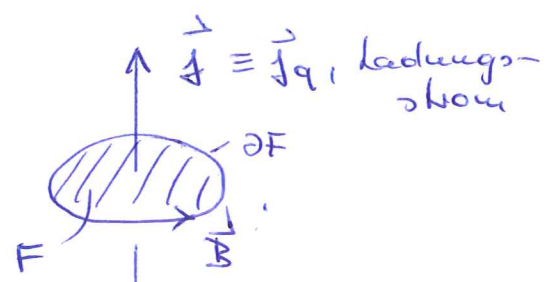
### 3.1 Ampèresches Gesetz:

es folgt aus der Maxwell-Gleichung durch Flächenintegration,

$$\int_F d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \int_F d\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

und mit dem Stokes'schen Satz

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$



Ampèresches Gesetz (1820; eigentlich "Biot-Savart'sches Gesetz")

Das Linienintegral der magnetischen Induktion über eine geschlossene Kurve ist gleich dem  $\frac{4\pi}{c}$  fachen des Stromes durch die Kurve; es gilt die Rechts-Hand-Regel. Beachte: die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  ist vektoriell und hat eine Richtung, die Stromstärke  $I = \int d\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r})$  ist skalar.



### 3.2 Magnetischer Kraftfluss

Der Kraftfluss  $\mathcal{F}^m$  durch eine Fläche  $F$  ist

$$\mathcal{F}^m := \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

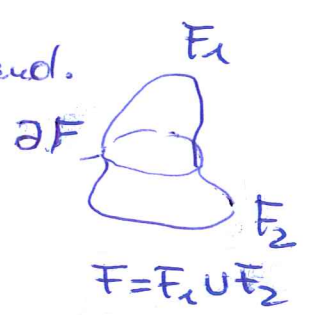
Beh: Es hängt nur vom Rand  $\partial$  der Fläche ab, nicht von der Fläche selbst.

Bew.: Seien  $F_1, F_2$  zwei Flächen mit gleichem Rand.

Bilde die Differenz der Flüsse

$$\mathcal{F}_1^m - \mathcal{F}_2^m = \int_{F_1} d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}) - \int_{F_2} d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

$$= \int_{F=F_1 \cup F_2} d\vec{f} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int d^3r \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r})}_{\substack{\downarrow \\ \text{HWG}}} = 0$$



( $F_1$  und  $F_2$  sind in die gleiche Richtung orientiert; bei Addition Vorzeichen ändern.)

### 3.3 Biot-Savart'sches Gesetz

ermöglicht die Berechnung des magnetischen Feldes einer Stromverteilung. Es folgt aus der HWG für die Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad \text{durch Bildung der Rotation:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r})$$

$$\text{mit } \Delta \vec{a} \equiv \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} \quad , \quad \text{wg. } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j} = -\Delta \vec{B} \quad , \quad \text{oder}$$

$$\Delta \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r})$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}'_{\vec{r}'} \times \vec{j}(\vec{r}') \quad [\vec{\nabla}'_{\vec{r}'} \equiv \vec{\nabla}']$$

Es ist  $\int_V d^3r' \vec{\nabla}' \left[ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} (\times \vec{j}(\vec{r}')) \right] :=$   $\vec{\nabla}' [ ] : \vec{\nabla}'$   
wirkt auf beide  
Terme in [ ]

$$= \int_V d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{j}(\vec{r}') + \int_V d^3r' \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') =$$

Poynting  
 $\oint_F d\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow 0$  für " $V \rightarrow \infty$ "  
 (da  $\propto 1/r$ )

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int_V d^3r' \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}')$$

und mit  $\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$  \*

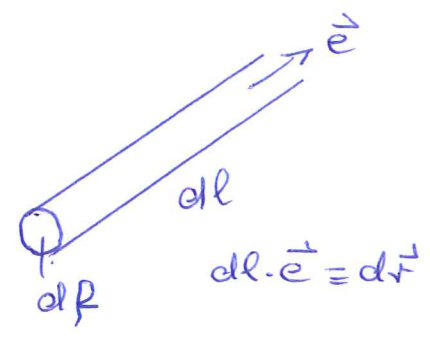
folgt das Biot-Savartsche Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}')$$

\*  $\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \vec{\nabla}' [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-1/2} =$   
 $= -\frac{1}{2} [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{-3/2} \cdot (-2) \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}$   
 $= \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$

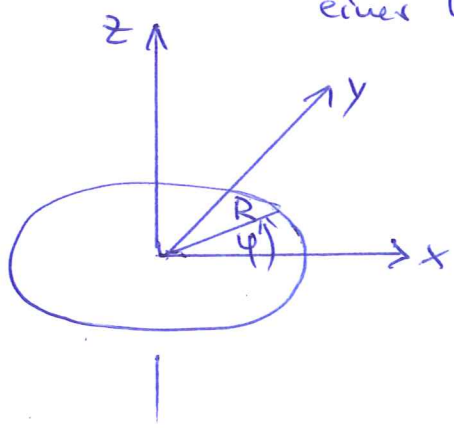
Ist die Ausdehnung des Leiters  
senkrecht zur Stromrichtung  
vernachlässigbar klein, so wird

$$d\vec{r}' \approx d\vec{r}' \cdot \vec{e}' \approx I d\vec{r}'$$



$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \times d\vec{r}'$$

Beispiel: Berechne das  $\vec{B}$ -Feld in der Mittelachse (z-Achse)  
eines Kreisstromes (siehe Blatt 6, Aufg. 1)



$$\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z')$$

$$d\vec{r}' = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) d\varphi$$

$$\Rightarrow (\vec{r}' - \vec{r}) \times d\vec{r}' = [R(z-z') \cos \varphi, R(z-z') \sin \varphi, R^2] d\varphi$$

$$|\vec{r}' - \vec{r}| = [R \cos \varphi, R \sin \varphi, z-z'] = [R^2 + (z-z')^2]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0,0,z) = \int \frac{dz' \cdot 2\pi I R^2}{c [R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

Durch Integration folgt daraus das Feld im Inneren  
einer Spule der Länge  $l$  mit  $N$  Windungen,

$$\vec{B}(0,0,z) = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{N dz'}{l} \frac{2\pi I R^2 \cdot \vec{e}_z}{c [R^2 + (z-z')^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot I \cdot N}{c \cdot l} \cdot \vec{e}_z \left[ \frac{l/2 - z}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} \right]$$

Für eine sehr lange Spule mit  $l \gg R$  folgt im Innenbereich ( $|z| \ll \frac{l}{2}$ ) mit

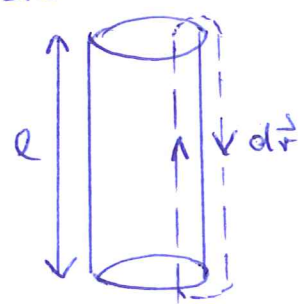
$$[ \dots ] \approx \frac{l/2}{l/2} + \frac{l/2}{l/2} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(0,0,z) = \frac{4\pi \cdot I \cdot N}{c \cdot l} \vec{e}_z}$$

Außerhalb der Spule ist die magnetische Induktion klein gegen diesen Wert, denn für einen geschlossenen Weg, der den Spulenanfang einschließt, liefert das Ampèresche Gesetz für das Integral der Induktion

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \cdot I \cdot N$$

was näherungsweise dem Wert im Innern der Spule entspricht  $\Rightarrow$  der Wert im Außenbereich muß klein sein.



### 3.4 Vektorpotential

In der Elektrostatik läßt das elektrische Feld sich aufgrund seiner Rotationsfreiheit  $-\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  als Gradient eines skalaren Potentials darstellen,  $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r})$ , denn  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) \equiv 0$ .

In der Magnetostatik gibt das analog nur außerhalb von Leitern, denn dort ist  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ .

Die magnetische Induktion läßt sich jedoch wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  stets als Rotation eines vektoriellen Potentials  $\vec{A}(\vec{r})$  darstellen,

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})}$$

Ein expliziter Ausdruck für das Vektorpotential folgt aus dem Biot-Savart'schen Gesetz,

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \int d^3r' \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') = \quad (\text{z.S. 3.4!})$$

$$= +\frac{1}{c} \int d^3r' \left( \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') =: \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

mit dem Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$ ,  $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} = 0]$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wg.  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$  ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  erfüllt.

Dieses Vektorpotential ist eibergaugefrei:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{j}(\vec{r}')$$

$$= -\frac{1}{c} \int d^3r' \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{j}(\vec{r}') =$$

$$= +\frac{1}{c} \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \stackrel{\uparrow}{=} 0$$

da  $\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') = 0$

$$\left[ \text{wg. } \int d^3r' \vec{\nabla}' \left[ \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') + \right.$$

$$\left. + \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{\text{Divergenz}}{=} \oint d\vec{f} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow 0 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \text{ "Coulomb-Eichung"}} \propto 1/r \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

Das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  ist in der ED ("klassisch") nicht eibergaugefrei; Meßgröße ist die Wucht, die durch die magnet. Induktion bestimmt wird. (Beachte Unterschied zw.  $\vec{A}$  &  $\vec{B}$ : dort ist das Vektorpotential via Aharonov-Bohm Effekt messbar).

## Eichtransformation

Wie eingangs (S. 3.1) dargestellt, läßt sich das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  umändern, ohne das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$  zu verändern:

$$\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(\vec{r})$$

mit einer beliebigen, zweifach differenzierbaren skalaren Funktion  $\chi(\vec{r})$ , denn  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi(\vec{r}) = 0$ .

Die Rotation des Magnetfeldes ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

Mit der Eichfreiheit von  $\vec{A}(\vec{r})$  können wir die Divergenz des Vektorpotentials festlegen.

In der Magnetostatik mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = 0$  ergab sich die Coulomb-Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$ , so dass folgt

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r})$$

analog zur Poisson-Gleichung in der Elektrostatik. Die dort gemachten Aussagen zur Eindeutigkeit des Potentials  $\phi$  gelten analog für das Vektorpotential  $\vec{A}$ , mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

In der vollen (zeitabhängigen) Elektrodynamik ist der Strom jedoch nicht divergenzfrei: es gilt die Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Die Eichfreiheit der ED-Potentiale wird dort beispielsweise in der sog. Lorenz-Eichung (Ludwig Lorenz, dänischer Physiker)

$$\text{ausgenutzt: } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0; \quad (\Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = 0)$$

sie ist z.B. bei der Berechnung elektromagn. Wellen vorteilhaft.



Zu: Verschwinden des mag. Monopolterms:

Bew: Für  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  verschwindet für beliebige  
unkontinuierliche Funktionen  $f(\vec{r}), g(\vec{r})$   
das Integral

$$I = \int_V d^3r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \cdot \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) =$$

(partielle Integration  
im 2. Term, Randwerte  
verschwinden bei lokali-  
sieren  $\vec{j}(\vec{r})$ )

$$= \int_V d^3r [f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g - f \vec{\nabla} \cdot (g \vec{j})]$$

Bew: Differenzieren partiell im zweiten Term:

$$\vec{\nabla} \cdot (g \vec{j}) = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g \quad \text{wg. } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow I = \int_V d^3r \cdot f [\vec{j} \cdot \vec{\nabla} g - \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g] = 0$$

Für  $f=1$ ,  $g=x_i$  wird das Integral I

$$I = \int_V d^3r \left( j_k \frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right) = \int_V d^3r j_i(\vec{r}) = 0$$

$\Rightarrow$  der Monopol verschwindet,

$$\frac{1}{c \cdot r} \int_V d^3r' j_i(\vec{r}') = 0$$



Das magnetische Moment  $\vec{m}$  der Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  ist definiert als

$$\vec{m} := \frac{1}{2c} \int_V d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] ]$$

Durch mathematische Umformungen des Dipolanteils der Multipolentwicklung von  $\vec{A}(\vec{r})$  lässt sich zeigen, dass gilt

$$\vec{A}^{\text{dipol}}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

Die entsprechende Dipolnäherung des Magnetfeldes ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \stackrel{\text{dipol}}{\approx} \vec{m} \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{Es ist } \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) r^3 - \vec{r} (\vec{\nabla} r^3)}{r^6} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0,$$

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} &= \left( m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \frac{x_j}{r^3} = m_i \left[ \frac{r^3 \delta_{ij} - x_j 3r^2 \frac{x_i}{r}}{r^6} \right] \\ &= m_i \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) \end{aligned}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}$$

Magnet. Dipolfeld,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$$

( $\vec{m}$  am Koordinatenursprung  $\vec{r} = 0$ !)

Für diskrete Ladungen  $q_i$  ( $\vec{r}_i$ ) mit Geschwindigkeit  $\vec{v}_i$ ,

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Wird das magnetische Moment

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2c} \int_V d^3r' \left[ \vec{r}' \times \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c m_i} \vec{L}_i \end{aligned}$$

mit den Massen  $m_i$  (Impulsen  $m_i \vec{v}_i$ ) und Drehimpulsen  $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ . Für  $N$  gleiche Ladungen  $q_i = q$  und  $m_i = m$  folgt

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2mc} \cdot \vec{L}}$$

als Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls.

Beachte: dieser Zusammenhang gilt für

"klassische" Bahndrehimpulse  $\vec{L}$ .

Für "quantenmechanische" beschreibbare Teilchen mit einem "Eigendrehimpuls"  $\vec{S}$  (Spin) gilt

$$\vec{m}_S = \frac{q}{2mc} \cdot g \cdot \vec{S}$$

mit dem "Landé-Faktor"  $g_e = 2$ , das sich im Rahmen der Dirac-Theorie berechnen lässt. In der Quantenelektrodynamik werden korrekturen abgeleitet,  $g = 2(1 + \frac{\alpha}{2\pi})$  für das Elektron:  $g_e \approx 2.002319...$ , die sehr gut mit dem Experiment übereinstimmen.

(Nachweis nur mit unebenen Atomen wie  $^{47}\text{Ag}$  (5s Elektron) möglich, da bei geladenen Teilchen die Lorentzkraft überwiegt)

### 3.6 Magnetisierung von Medien

In Medien können die Moleküle als Folge molekularer Ströme "innere" magnetische Momente  $\vec{m}(\vec{r}_i)$  tragen, die - zusätzlich zum Beitrag aus der Stromdichte - das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  beeinflussen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{m}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

(Beitrag des Mediums in Dipolnäherung, s.S. 3.10),

Analog zur Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  in der Elektrostatik bei Anlegen des  $\vec{E}$ -Feldes definieren wir die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  als mittlere Dichte des magnetischen Moments  $\vec{m}_i$ ,

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\sum_i \vec{m}_i(\vec{r}_i)}{V}$$

und nach einer Mittelung über die  $\vec{m}_i(\vec{r}_i)$  für den Übergang zu kontinuierlichen Medien wird das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

Analog zur Polarisationsladungsdichte  $\rho_p$  in der Elektrostatik (mit  $\rho = \rho_f + \rho_p$ ) entspricht die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  ein Magnetisierungsstrom

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})$$

und das Vektorpotential wird

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\begin{aligned} \text{Bildet man } \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \\ &= \vec{B} \qquad = 0 \text{ in Coulomb-Eichung} \end{aligned}$$

folgt mit der Gleichung für  $\Delta \vec{A}$  von S. 3.8 (analog zur Poisson-Gleichung)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \int_V [\vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}_M(\vec{r}')] \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{4\pi}{c} [\vec{j}(\vec{r}) + \vec{j}_M(\vec{r})] \end{aligned}$$

dh. im magnetisierbaren Medium wird der Gesamtstrom einschließlich des Magnetisierungsstromes  $\vec{j}_M$  die Quelle des  $\vec{B}$ -Feldes.

In den Maxwell-Gleichungen (s. 1.17, Kap. 1.5) ist die Rotation von  $\vec{H}$  allein durch Ladungs- und Verschiebungsströme bestimmt,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_q + \dot{\vec{D}}$$

im statischen Fall mit  $\dot{\vec{D}} = 0, \vec{j} \equiv \vec{j}_q$ :

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

dh. der Magnetisierungsstrom spielt hier keine Rolle.

Mit der Beziehung zwischen  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  und  $\vec{j}_{\text{m}}$  wird

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{m}} = \vec{\nabla} \times \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}}$$

analog zum elektrostatischen Resultat  $\vec{E} = \vec{D} - 4\pi \vec{P}$ .

Mit der Permeabilität  $\mu$  ist  $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$  (siehe Kap. 1.3), und die magnetische Suszeptibilität  $\chi_M$  wird eingeführt als

$$\boxed{\vec{M} = \chi_M \cdot \vec{H}} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{H} (1 + 4\pi \chi_M)} \\ \mu = 1 + 4\pi \chi_M$$

Es ist für

Diamagnetika:  $\mu < 1, \chi_M < 0$

Paramagnetika:  $\mu > 1, \chi_M > 0$ ;  $\chi_M = \chi_M(T) \propto \frac{1}{T}$

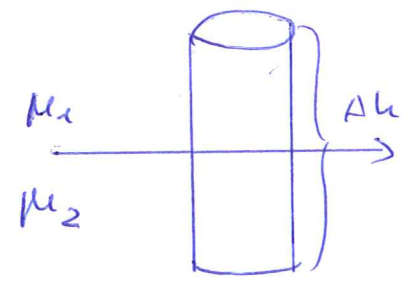
Ferromagnetika:  $\mu \gg 1, \chi_M \approx \frac{\mu}{4\pi}$

„Curiesches Gesetz“ für die Temperaturabhängigkeit

- In Diamagnetika erzeugen äußere Felder Ströme; die erzeugte Magnetisierung schwächt das Feld,  $\vec{H} \parallel \vec{H}$ .
- In Paramagnetika haben die Moleküle ein magnet. Moment  $\Rightarrow \vec{H}$  verstärkt das Feld.

Grenzflächen: Bedingungen an  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$

Analog zum elektrostatischen Fall bei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  (S. 2.30)



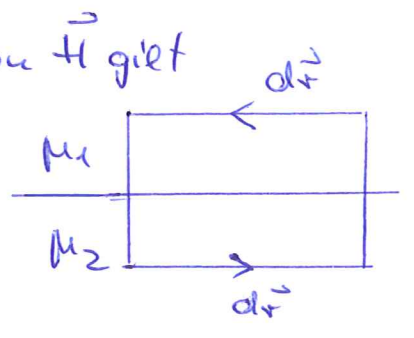
gilt für die Normalkomponente von  $\vec{B}$  wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  (stets!)

$$\boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0}$$

Die Normalkomponente der magn. Induktion ist stetig an Grenzflächen.

Für die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$



$$\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{f} = \int_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f} = \frac{4\pi}{c} I_s$$

⇒ Die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  darf höchstens um den Betrag der Oberflächenströme  $I_s$  springen,

$$\boxed{H_{1t} - H_{2t} = \frac{4\pi}{c} I_s}$$

Beachte: In Supraleitern gibt es stets Oberflächenströme mit endlicher Eindringtiefe ⇒  $H_{1t} \neq H_{2t}$  dort.

In Leitern kann  $I_s = 0$  sein, so dass  $H_{1t} = H_{2t}$  stetig an der Grenzfläche wird.

Die Normalkomponente von  $\vec{H}$  ist für  $\mu_1 \neq \mu_2$  unkont.,  $H_{1n} = (\mu_2/\mu_1) H_{2n}$ .

### 3.7 Energie und Kraft im magnetischen Feld

Analog zur Elektrostatik [dort  $U = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{D}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$ ]  
 ist die magnetostatische Energie  
 in Materie

$$U_m = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{B}(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}), \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

Für die Kraftdichte der Lorentzkraft findet  
 man empirisch

$$\vec{f} = \rho \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = \rho \vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \times \vec{B}$$

Da  $\frac{v}{c} \ll 1$  ist die magnetische Kraft i.a.  
 klein gegen die elektrische. Integral ist  
 die magnetische Kraft

$$\vec{F}_m = \frac{1}{c} \int_V d^3r \left[ \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right]$$

Für eine geschlossene dünne Leiterschleife mit  
 Stromstärke  $I$  wird das

$$\vec{F}_m = \frac{I}{c} \int [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})]$$

Die Kraft eines Stromleiters (1) auf einen Stromleiter (2)  
 ist

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_2(\vec{r}) \times \vec{B}_1(\vec{r}) =$$

$$= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \left[ \vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r}) \right] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Herleitung von  $\vec{F}_2$ :

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}_2(\vec{r}) \times \vec{B}_1(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \underbrace{\vec{j}_2(\vec{r})}_{\vec{a}} \times \left[ \underbrace{\left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)}_{\vec{b}} \times \underbrace{\vec{j}_1(\vec{r}')}_{\vec{c}} \right]$$

mit  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \left[ \vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r}) \right] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \left[ \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \vec{j}_2(\vec{r}) \right] \vec{j}_1(\vec{r}') \end{aligned}$$

und mit Anwendung des Gaußschen Satzes folgt wegen des verschwindenden Flächenintegrals

$$\begin{aligned} \int d^3r \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \vec{j}_2(\vec{r}) &= - \int d^3r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla} \vec{j}_2(\vec{r}) \\ &= 0 \text{ wg. } \vec{\nabla} \vec{j}_2(\vec{r}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \frac{1}{c^2} \int d^3r \int d^3r' \left[ \vec{j}_1(\vec{r}') \vec{j}_2(\vec{r}) \right] \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



4. Spezielle Relativitätstheorie

4.1 Einführung, Lorentz-Transformation

- Die Elektrodynamik ist das erste Beispiel einer klassischen Feldtheorie, in der Newtons Konzept der "instantanen Fernwirkung" aufgegeben wird: Die Kräfte breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit - der Lichtgeschwindigkeit - aus, die ED ist eine Nahwirkungstheorie.
- Das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit c hat A. Einstein 1905 seiner speziellen Relativitätstheorie zugrunde gelegt, in der Arbeit "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann. Physik 17 (1905) 891-921.
- Damit die Lichtgeschwindigkeit für alle Beobachter gleich ist, muss die klassische Vorstellung der Verknüpfung von Raum- und Zeitkoordinaten in der Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzt werden.
- Nur die Gleichungen der Newtonschen Mechanik sind invariant bei Galilei-Transformation, insbes.

$$t' = t, \quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - vt$$

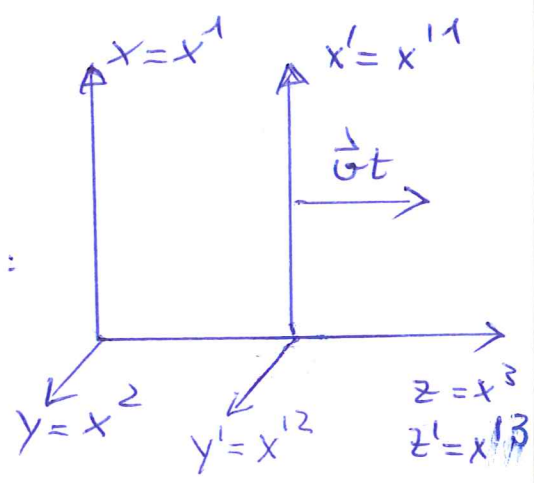
die Maxwell-Gleichungen sind das nicht, denn das Licht müßte sich in einem bewegten Inertialsystem mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die von der Richtung abhängt.

- Der Widerspruch zwischen klassischer Mechanik und ED wird aufgehoben, wenn wir die Galilei-Transformation durch die Lorentz-Transformation ersetzen:

Sie vermittelt zwischen zwei Systemen  $(\vec{x}, t)$  und  $(\vec{x}', t')$ , die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit entlang ihrer gemeinsamen Achse (z.B.  $z \equiv x^3$ -Achse) bewegen.

Mathematisch beschrieben durch die Transformationsmatrix  $\Lambda(\beta)$ :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda(\beta) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$



mit  $\beta = v/c$  Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit,

$$\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

und dem Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \geq 1$$

- Die Transformation der Zeit ("Relativität der Zeit", Abhängigkeit vom Bezugssystem) ist berücksichtigt
- Die Maxwell-Gleichungen sind invariant gegenüber LT.

Im Fall nur einer Raumdimension und eines "Lorentz-Boosts" in dieser Richtung + wird die LT

$$\Lambda^{(1)}(\beta) = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

(siehe Blatt 7, Aufg. 2; dort zwei aufeinander folgende boosts in x-Richtung)

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda^{(1)}(\beta) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Aus der LT folgen charakteristische (messbare: s. Blatt 7) Eigenschaften der "Minkowski-Welt", insbesondere die

### Zeitdilatation

Haben zwei Ereignisse am Ort  $\vec{x} = (0, 0, 0)$  im ungeschickenen System  $S$  den "Zeitabstand"  $x^0$ ,

$$S \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

so werden sie im geschickenen System  $S'$  bei Anwendung der LT mit  $\Lambda(\beta)$  zu

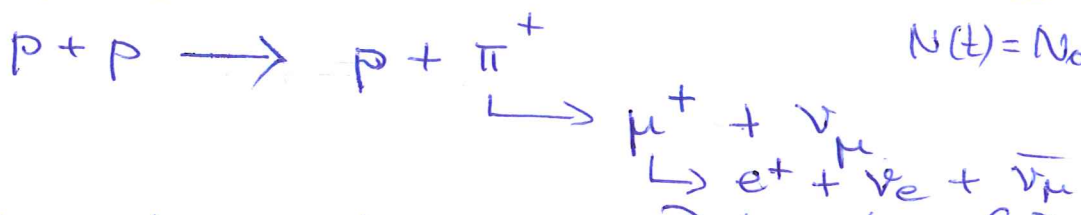
$$S' \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma x^0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \gamma x^0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  der zeitliche Abstand im geschickenen System ist  $\gamma x^0 > x^0$  (für  $\beta > 0$ ): Zeitdilatation, "bewegte Uhren gehen langsamer"

Beispiel: Lebensdauer von Myonen im bewegten System (Blatt 7, Aufg. 1)

Beim Einfall von Protonen aus der kosmischen Strahlung auf die Erdatmosphäre entstehen in ~ 10 km Höhe Myonen ( $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ , mittlere

Lebensdauer  $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , Halbwertszeit  $t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau = 1.52 \mu\text{s}$ ;  
z.B. durch  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$ )



max. Reichweite der Myonen im Ruhesystem für  $v \approx c$  (im relativ dazu bewegten Erdsystem)  
 $\bar{d} \approx c \cdot \tau \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s} \approx \underline{660 \text{ m}}$

⇒ Myonen könnten die Erdoberfläche nicht erreichen.

Dennoch wird auf Meereshöhe eine Flussdichte der  $\mu^+$  von  $100 \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$  gemessen - als Folge der Zeitdilatation im bewegten System: "bewegte Teilchen zerfallen langsamer":

Für ein Myon mit Impuls  $p = 1.8 \text{ GeV}/c$  ist die relativistische Energie

$$E \equiv \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{1.8^2 + (0.106)^2} \text{ GeV} \approx 1.803 \text{ GeV}$$

Mit der relativist. Energie läßt sich der Lorentz-Faktor schreiben als

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv E / (mc^2) \approx 17.01$$

daraus die Geschwindigkeit der Myonen in Einheiten von  $c$ ,

$$\beta = \frac{pc}{E} \approx \frac{1.8}{1.803} \approx 0.9983$$

Die mittlere Lebensdauer der  $\mu^+$ 's im Erdsystem System wird (für  $p=1.8 \text{ GeV}/c$ ; von der - "ruhenden" Erdoberfläche aus betrachtet)

$$\tau' = \gamma \tau \approx 37.42 \mu\text{s}$$

und der in dieser Zeit zurückgelegte Weg

$$\begin{aligned} \bar{d}' &= v \cdot \tau' \approx 0.9983 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 37.42 \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ &\approx 11.21 \cdot 10^3 \text{ m} \approx \underline{\underline{11.2 \text{ km}}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  die Myonen können in einer mittleren Lebensdauer die Erdoberfläche - als Folge der Zeitdilatation - erreichen.

Längenkontraktion ("Lorentz-Kontraktion")

Betrachte einen Einheitsmaßstab in Bewegungsrichtung im System  $S$  zur Zeit  $t=0$ , begrenzt durch die Vierervektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beobachte den Maßstab zum festen Zeitpunkt

$x^{10} = 0$  im System  $S'$ . Die LT ergibt

$$x^{10} = \gamma x^0 - \beta \gamma x^3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x^0 = \beta x^3 = \beta \quad \text{als entsprechender Zeitpunkt im System } S$$

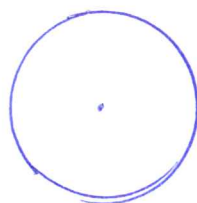
Damit wird die Länge des Maßstabes im (bewegten) System  $S'$  mit  $x^3 \equiv 1$ :

$$x^{13} = -\beta \gamma x^0 + \gamma x^3 = \gamma (1 - \beta^2) = \underline{\underline{\sqrt{1 - \beta^2} < 1}}$$

$\Rightarrow$  bewegte Maßstäbe erscheinen verkürzt.

Wie die Zeitdilatation ist die Längenkontraktion ein physikalischer "realer" Effekt mit messbaren Konsequenzen.

Beispiel: Kollision zweier Blei-Ionen im Large Hadron Collider LHC mit einer Energie von  $E = 2.76 \cdot 10^{12}$  eV pro Teilchenpaar (insges. 208 Teilchenpaare, p+n)



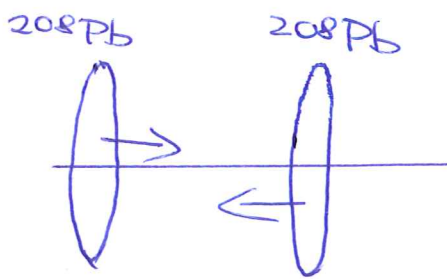
Ruhesystem  $S$ :

$$R = 1.2 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$

$$\approx 7.1 \text{ fm}$$

Lorentz-Kontraktion der Ionen in Bewegungsrichtung

$$\text{Impuls } p \text{ jeder Ions: } p = 3.5 \cdot \frac{2}{A} \frac{\text{TeV}}{c} = 1.38 \frac{\text{TeV}}{c}$$



Collider Experiment

$$p = 1.38 \frac{\text{TeV}}{c} \quad \text{Impuls};$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}; \quad m = 0.938 \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

$$= \sqrt{1.904 + 0.9 \cdot 10^{-6}} \text{ TeV}$$

$$\approx 1.3800003 \text{ TeV}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{pc}{E} \approx 0.99999998$$

$\Rightarrow$  Verkürzter Ionenradius in Bewegungsrichtung

$$R' = R \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = 7.1 \text{ fm} \cdot 6.8 \cdot 10^{-4} \approx 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ fm}$$

$\Rightarrow$  bei der Kollision treffen zwei kreisförmige Scheiben aufeinander, die (nahezu) "transparent" sind und einander durchdringen.

[ Im Volumen zwischen den sich entfernenden Scheiben werden aus der relativistischen Energie neue Teilchen erzeugt,  $\geq 20000$  geladene Hadronen in einer PbPb Reaktion bei  $E = 2.76 \text{ TeV}$  pro Teilchenpaar. ]

Außer als Zeitdilatation und Längenkontraktion ergibt sich die scheinbare Massenzunahme eines bewegten Körpers nicht unmittelbar aus der LT - ihre Ursache ist vielmehr das Massenäquivalent der kinetischen Energie, das für einen Körper mit Ruhemasse  $m$  eine "transversale" oder "relativistische" Masse ergibt,

$$m' = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} > m \text{ für } v > 0 \quad \left[ \text{vgl. jedoch A. Einstein 1905, Annalen d. Physik 17(1905) p. 919} \right]$$

$m' = m / (1 - \beta^2)^{1/2}$

Infolge der Zeitabhängigkeit der Masse wird die Kraft bei beschleunigter Bewegung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m\vec{a}$$

Durch den zusätzlichen Term  $\frac{dm}{dt} \vec{v}$  vergrößert sich bei gegebener Beschleunigung  $\vec{a}$  die Kraft: Der Körper verhält sich, als hätte er eine größere Masse.

Mit  $m \rightarrow m' = \gamma m$  wird  $F = |\vec{F}|$

$$F = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) v + \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dv}{dt} = \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left( -2 \frac{v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt} \cdot v + \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow F = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

("Der Körper verhält sich, als hätte er die Masse  $m = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}$ ")

- in Übereinstimmung mit exp. Befunden: Teilchenbeschleuniger

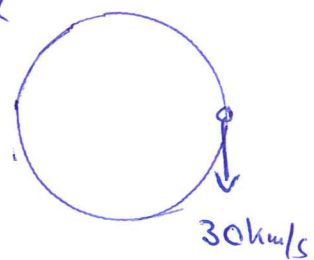


Historischer Einschub:

Außer als Einstein hatte Maxwell keinen Widerspruch zwischen Newtonscher Mechanik und ED gesehen, denn er war von der Existenz eines „absolut ruhenden Äthers“ überzeugt, den Fresnel 1818 eingeführt hatte: Demnach gäbe es ein ausgezeichnetes Bezugssystem, in dem die Maxwell-Gleichungen gelten, und ein materielles Bezugssystem für elektromagnetische Wellen.

Maxwell: „Es kann keinen Zweifel geben, dass der interplanetarische und interstellare Raum nicht leer ist, sondern erfüllt mit einer materiellen Substanz oder einem Körper, der nicht der größte und wahrscheinlich der homogenste ist, den wir kennen.“

Demnach bewegt sich die Erde durch den Äther, und da Licht sollte unterschiedliche Zeiten benötigen, um die gleiche Entfernung parallel oder senkrecht zu Erde zurückzulegen



⇒ auf einer Strecke von 1m wird ein Zeitunterschied entsprechend 1/40 der Wellenlänge von gelbem Licht erwartet

⇒ Vorschlag zur Messung: Michelson 1881, Potsdam aus der Interferenz von orthogonalen und parallelen Strahlen.

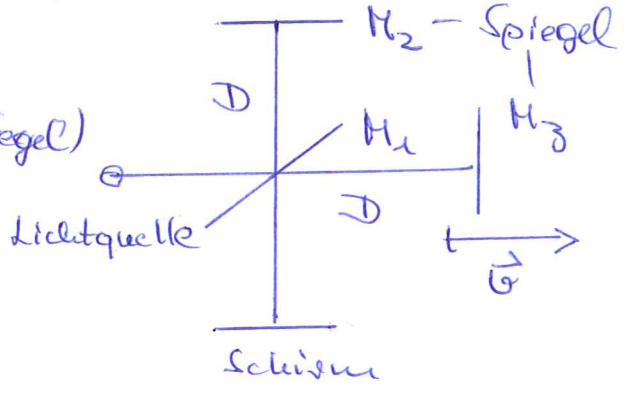
⇒ Experiment: Michelson 1881; H. S. Rowley 1887: kein messbarer Effekt („Das wichtigste Experiment in der Geschichte der Wissenschaft mit negativem Ausgang“)

⇒ Licht bewegt sich stets mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

### Das Michelson (1881 Potsdam) & Morley (1887) Experiment:

Ergebnis:

- Die bei  $M_1$  (halbdurchlässiger Spiegel) geteilten Strahlen werden bei  $M_2, M_3$  reflektiert, in  $M_1$  wieder zusammengeführt  $\Rightarrow$  konstruktive Interferenz am Schirm.



- Nach 6 Stk Drehung um  $90^\circ$  infolge der Erdrotation: Eine Änderung der Lichtlaufzeiten würde das Interferenzmuster beeinflussen, auch bei "Äthergeschwindigkeit"  $v \ll c$ .

- Messergebnis: Nullresultat.

- Mögliche Erklärung: Äther bewegt sich parallel zur Erde mit 30 km/s - jedoch ergab eine Messung 6 Monate später (antiparallele Bewegung!) ebenfalls ein Nullresultat.

$\Rightarrow$  Das Licht bewegt sich stets mit der Geschwindigkeit  $c$  relativ zur Lichtquelle und zum Spiegel.

$\frac{t'}{t} = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = \frac{2D}{c} \cdot \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

H.A. Lorentz führte zur Erklärung des Nullresultats die ad-hoc Hypothese einer Längenkontraktion des Versuchsaapparats in Bewegungsrichtung ein, mit

$$l'_t = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{siehe FitzGerald: } l_t = l - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} l), \text{ d.h. 1. Ordnung}$$

so dass sich die Laufzeit entsprechend verringert zu

$$\boxed{t'_t = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_n}$$

↑  
bei Relativ-  
Invarianz ( $t_n = \text{Laufzeit } \perp \text{ Bewegungsrichtung}$ )

in Übereinstimmung mit dem MM-Experiment

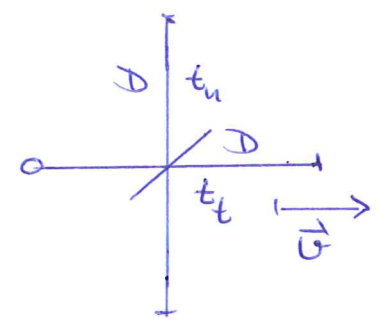
Den Ausdruck für die Längenkontraktion ist formal identisch mit dem aus der SRG - dort folgt er jedoch aus dem Postulat der konstanten Lichtgeschwindigkeit,

- es wird kein "Äther" benötigt - und der LT für die Transformation der Bezugssysteme.

# Lichtlaufzeit im Michelson-Experiment (Rechnung zu voriger Seite)

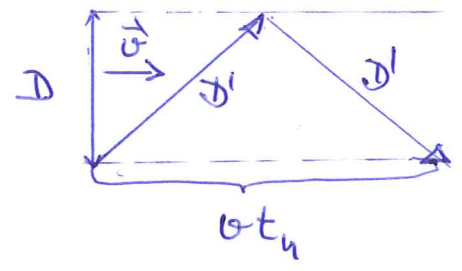
bei Annahme der Galilei-Transformation:

Tangential:



$$t_t = \frac{D}{c-v} + \frac{D}{c+v} = \frac{2D}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Normal:



Relativ zu einem ruhenden Beobachter legt das Licht die Strecke  $2D'$  zurück  $\Rightarrow$

$$t_u = \frac{2D'}{c} \Rightarrow D' = \frac{ct_u}{2} ; D'^2 = D^2 + \left(\frac{vt_u}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow t_u = \frac{2D}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow t_t - t_u = \frac{2D}{c} \left[ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right] \approx \frac{Dv^2}{c^3}$$

1. Ordnung

Bei  $D=1m, v=30km/s, \beta \approx 10^{-4}$

$$\Rightarrow \Delta t = t_t - t_u \approx \frac{D \cdot 10^{-8}}{c} \approx \underline{\underline{3.3 \cdot 10^{-17} s}}$$

In dieser Zeit legt das Licht  $\approx 1140$  seiner Wellenlänge zurück - was interferometrisch messbar ist. M&M fanden jedoch ein Nullresultat (s. auch Rev. Mod. Phys. 27 (1955) 167).

$\Rightarrow$  "Lorentz-Kontraktion" in Bewegungsrichtung als Hypothese, um  $t_t \equiv t_u$  (unter Galilei-Transformation!) zu erzwingen

$\Rightarrow$  Natürliche Erklärung im Rahmen der SRT als Folge der Lorentz-Transformation zwischen relativ zueinander bewegten Bezugssystemen.

## 4.2 Notation im Minkowski-Raum

Koordinaten: Ein Raum-Zeit-Punkt

$(x^0, x^1, x^2, x^3)$  wird durch die

Zeitkoordinate  $x^0 = ct$  und die

Raumkoordinaten  $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$  definiert

Indices:

$\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$

bezeichnen Komponenten von 4-Vektoren

$i, k, \dots = 1, 2, 3$

Komponenten von 3-Vektoren im gewöhnlichen Raum

$$x^\mu = (x^0, x^k) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Die Metrik im Raum-Zeit Kontinuum ist durch den metrischen Tensor definiert,

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dh.  $g_{00} = 1, g_{kk} = -1; g_{\mu\nu} = 0 \forall \mu \neq \nu$

Man unterscheidet sog.

"kovariante" 4-Vektoren,  $a_\mu$ : transformieren wie  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

"kontravariante" " ,  $a^\mu$ : " " "  $x^\mu$ .

( $\hat{=}$  4-Vektoren und dazu dual 4-Vektoren).

Umwandlung von kovariante in kovariante

4er Vektoren durch Anwendung des metrischen Tensors,

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu \Rightarrow x_0 = x^0, x_k = -x^k$$

Summenkonvention: Über doppelt erscheinende Indices wird summiert;

$$\Rightarrow x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

„Hinaufziehen“ des Indices via

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu})$$

$$\text{Es ist } g^{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}$$

Dreis- und Viervektoren, Skalarprodukt

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x})$$

Skalarprodukt 3er Vektoren:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$$

Norm 3er Vektor (Betrag)

$$x \equiv |\vec{x}| = (\vec{x} \cdot \vec{x})^{1/2} = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$$

(Wenn eine Verwechslung mit dem Betrag des 3-Vektors ausgeschlossen ist, wird der Index  $\mu$  beim 4-Vektor oft weggelassen,  $x^\mu \rightarrow x$ )

Skalarprodukt 4er Vektoren  $x^\mu, y^\mu$

durch "Verjüngung" aus den jeweiligen ko- und kontravarianten Komponenten; nicht mehr positiv-semi-definit:

$$x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Norm 4er Vektor  $x^\mu$ :

$$x_\mu x^\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^2 \equiv g_{\mu\nu} x^\nu x^\mu$$

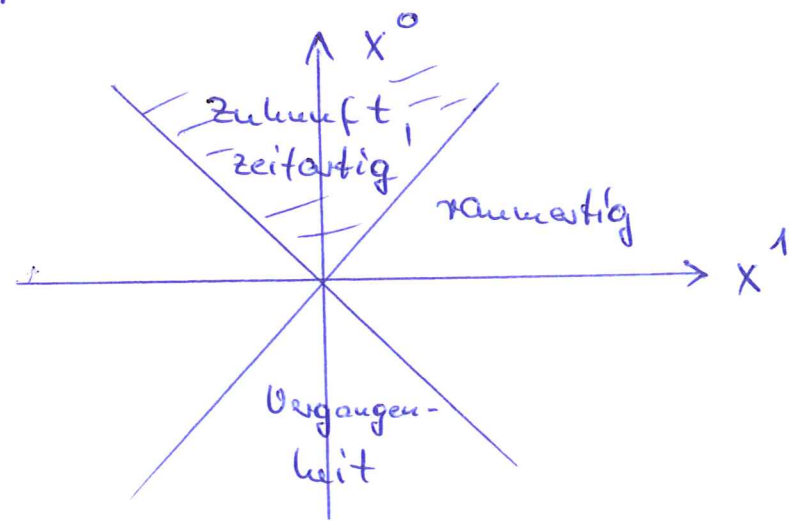
Klassifizierung der 4-Vektoren nach ihrer Norm:

Je nach Vorzeichen der Norm gibt es drei Arten von 4-Vektoren:

$$x_\mu x^\mu < 0, \quad x^\mu \text{ raumartig}$$

$$x_\mu x^\mu = 0, \quad x^\mu \text{ Nullvektor}$$

$$x_\mu x^\mu > 0, \quad x^\mu \text{ zeitartig}$$



"Minkowski-Diagramm"

# Differentialoperatoren im Minkowski-Raum

In 3d :  $\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In 4d : Die vier partiellen Differentialoperatoren  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  bilden einen kovarianten 4-Vektor

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial(ct)}, \vec{\nabla} \right)$$

Gradientenoperator

der entsprechende kontravariante Gradient ist

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = \left( \frac{\partial}{\partial ct}, -\vec{\nabla} \right)$$

Der d'Alembert-Operator ist (engl. "box operator")

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial^\nu \partial^\mu$$

Transformationseigenschaften der Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  :

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \underbrace{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}}_{\Lambda_\mu^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

⇒ die Ableitung transformiert sich wie  $x_\nu$ ,

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \text{ deshalb: } \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu, (\partial_\mu) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla} \right)$$

### 4.3 Viererpotential, Relativitätsprinzip

In 4d werden skalares Potential  $\phi$  und Vektorpotential  $\vec{A}$  zum 4-Potential zusammengefasst,

$(A^\mu) := (\phi, \vec{A})$ , so dass sich die Potentialgleichungen  $\Delta \phi = -4\pi \rho$  und  $\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$  schreiben lassen als

$$\square A^\mu = + \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad \text{mit der Viererstromdichte}$$

$$(j^\mu) := (c \cdot \rho, \vec{j}) ; \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Das Relativitätsprinzip fordert, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich sind: Es gibt kein ausgezeichnetes, "absolutes" Bezugssystem.

Daraus folgt insbesondere die Invarianz des d'Alembert-Operators bei Lorentz-Transformation  $\Rightarrow$

$$\Lambda g \Lambda^T = g \quad \text{die Invarianz von } g \text{ bei Lorentz-Transformation}$$

In Komponentenform:

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho}$$



Beweis der Invarianz, in Komponenten:

$$\text{Es ist } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda$$

$$\Rightarrow \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu = \Lambda^\lambda{}_\mu \partial'_\lambda g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu \partial'_\rho \stackrel{!}{=} \partial'_\lambda g^{\lambda\rho} \partial'_\rho$$

(es wird über gleiche Indices auf verschiedenen Ebenen summiert)

$$\Rightarrow \Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = g^{\lambda\rho}$$

$$\stackrel{!}{=} \boxed{\Lambda g \Lambda^T = g} \quad \text{mit} \quad \boxed{\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} = \Lambda^\lambda{}_\mu}$$

Daraus folgt

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 1$$

Für Rechtssysteme gilt  $\det \Lambda = +1$ , Linkssysteme  $-1$ .

Für das ME  $\lambda = 0, \rho = 0$  gilt

$$\Lambda^\lambda{}_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho{}_\nu = 1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_k (\Lambda^0{}_k)^2$$

$$\Rightarrow \Lambda^0{}_0 \geq 1 \vee \Lambda^0{}_0 \leq -1.$$

Das Vorzeichen der Determinante von  $\Lambda$  und das von  $\Lambda^0{}_0$  verwendet man zur Klassifizierung der Elemente der

Lorentz-Gruppe:

	$\det \Lambda$	$\text{sgn } \Lambda^0{}_0$	
eigentlich orthochron	1	1	} eigentliche LT
Raum-Zeit-Spiegelungstyp	1	-1	
uneigentlich orthochron	-1	1	} uneigentliche LT
Zeitspiegelungstyp	-1	-1	

Aus  $\det \Lambda = 1$  folgt insbesondere, dass das 4-d Raum-Zeit-Volumen invariant bei LT ist:

$$dt' d^3r' = \frac{1}{c} d^4x' = \frac{1}{c} \frac{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} d^4x$$

$$= \frac{1}{c} \det(\Lambda^\mu_\nu) d^4x = \frac{1}{c} d^4x = dt d^3r$$

Legen wir  $x^3 = z$  und  $x'^3 = z'$  - Achse in Richtung der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  der sich gegeneinander bewegenden Inertialsysteme und setzen  $x^1 = x^1, x^2 = x^2$  (keine Relativgeschwindigkeit  $\perp$  zu  $x^3$ ), folgt also zu Beginn von 4.1 genannte spezielle LT mit

$$x'^3 = \frac{x^3 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v x^3}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

und der zugehörigen Matrix

$$(\Lambda^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

In einem homogenen Raum-Zeit Kontinuum ist die Transformation  $x' \leftrightarrow x$  stets linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$\Lambda$  ist reell,  $\Lambda^*_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu\nu}$ , und erhält das Abstandsquadrat,

$$\Lambda_{\mu\nu} \Lambda^{\lambda\mu} = \Lambda_{\nu\mu} \Lambda^{\lambda\mu} = \delta_\nu^\lambda$$

## Invarianz des Skalarproduktes

Ist der Raum isotrop und kein Justizialsystem ausgezeichnet, muss das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren invariant bei LT sein:

$$s^2 = x^\mu x_\mu = s^2 = x^\mu x_\mu$$

$$s^2 = x^\mu x_\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \Lambda_\mu^\lambda x_\lambda = s^2 = x^\nu \delta_\nu^\lambda x_\lambda$$

dies ist für beliebiges  $x$  erfüllt für

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\lambda = \delta_\nu^\lambda$$

Die Umkehrtransformation wird

$$x^\lambda = \delta_\nu^\lambda x^\nu = \Lambda_\mu^\lambda \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda_\mu^\lambda x^\mu$$

Für die wohl verwendete spezielle LT lässt sich die Invarianz des Skalarproduktes direkt zeigen:

$$s^2 = x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - r^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

$$s^2 = x^\mu x_\mu = c^2 t'^2 - r'^2 = x_0'^2 - x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$$

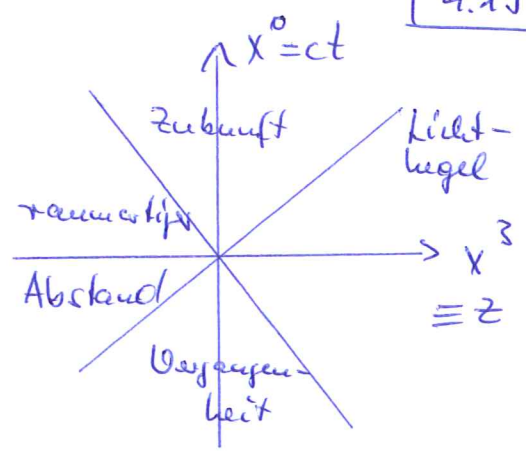
$$= (\gamma x_0 - \beta \gamma x_3)^2 - x_1^2 - x_2^2 - (-\beta \gamma x_0 + \gamma x_3)^2$$

$$= x_0^2 \underbrace{(\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2)}_{=1} + \underbrace{(-2\beta \gamma^2 x_0 x_3 + 2\beta \gamma^2 x_0 x_3)}_{=0}$$

$$- x_3^2 \underbrace{(-\beta^2 \gamma^2 + \gamma^2)}_{=1} - x_1^2 - x_2^2 =$$

$$= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = s^2 \quad \checkmark$$

Raumartige Abstand:



Für  $s^2 < 0$  gibt es Inertialsysteme, in denen die Ereignisse gleichzeitig stattfinden:  $t' = x'^0 = 0$

Sei  $(x^\mu) = (ct, 0, 0, z) \Rightarrow s^2 = c^2 t^2 - z^2$

$(x'^\mu): t' = \gamma \cdot (t - \frac{vz}{c^2}), z' = \gamma (z - vt)$

Für  $v = \frac{tc^2}{z}$  ist  $v^2 = \frac{t^2 c^4}{z^2}, \frac{v^2}{c^2} = \frac{t^2 c^2}{z^2}$

$\Rightarrow t' = 0, z' = \gamma \cdot z (1 - \frac{vt}{z}) = \gamma \cdot z (1 - \frac{v^2 t^2}{c^2})$   
 $= z \sqrt{1 - \frac{v^2 t^2}{c^2}} = \pm \sqrt{z^2 - c^2 t^2} = \pm \sqrt{-s^2}$

Man bezeichnet dann die Ereignisse  $(x^\mu), (x'^\mu)$  als raumartig zueinander gelegen: sie sind so weit entfernt, dass das Licht die Strecke nicht überbrücken kann.

## Zeitartigen Abstand

Für  $s^2 > 0$  gibt es Inertialsysteme, in denen zwei Ereignisse am gleichen Ort stattfinden:

$$\vec{x}' = 0; (x^\mu) = (ct, 0, 0, z), s^2 = c^2 t^2 - z^2$$

$$\text{Für } v = \frac{z}{t} \text{ ist } v^2 = \frac{z^2}{t^2}, \frac{v^2}{c^2} = \frac{z^2}{c^2 t^2}; z' = \gamma(z - vt) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t' &= \gamma\left(t - \frac{vz}{c^2}\right) = \gamma t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= \gamma v(t) \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} = \gamma v(t) \cdot \frac{s}{c} \end{aligned}$$

dh. das Vorzeichen von  $t'$  stimmt mit dem von  $t$  überein.

Im Ruhesystem gilt dann (ungestrichenes System)

$$\frac{1}{c} \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

## Eigenzeit $\tau$ :

Die Zeit, die im jeweiligen Ruhesystem verstreicht, ist die Eigenzeit. Für einen mit  $\vec{v}(t)$  bewegten Punkt ist

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

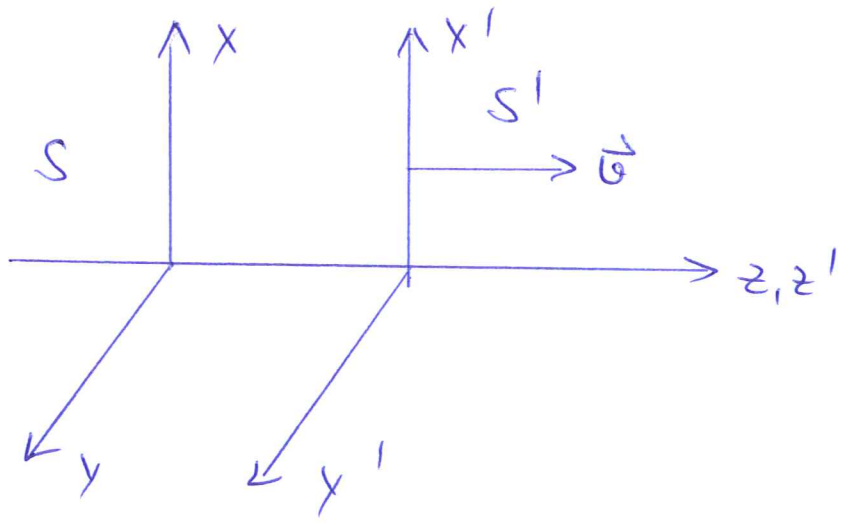
$$\Rightarrow \tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

## Lichtartiger Abstand

Ausbreitung eines Lichtblitzes auf dem Lichtkegel von einem Ereignis zum anderen mit  $s^2 = 0$ . Die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse ändert sich dabei nicht.

# Additionstheorem für Geschwindigkeiten



In S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit  $w'$  in z-Richtung.

Mit welcher Geschwindigkeit bewegt er sich in S?

$z = \gamma (z' + ut')$ ,  $t = \gamma (t' + \frac{uz'}{c^2})$  Umkehrtransformation

mit  $z' = w't'$

$\Rightarrow z = \gamma (u + w')t'$ ,  $t = \gamma (1 + \frac{uw'}{c^2})t'$

$\Rightarrow$  Geschwindigkeit des Punktes in S:

$$w = \frac{z}{t} = \frac{w' + u}{1 + \frac{w'u}{c^2}}$$

(siehe Annalen d. Phys. 17 (1905) 906)

Beispiele: 1)  $w' = u = 0.5c$ :

$w = \frac{c}{1 + 0.25} = 0.8c$

2)  $w' = u = c$ :  $w = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c$ : c ist Lichtgeschwindigkeit

3)  $w' = c, u = 0.5c$ :  $w = \frac{c + 0.5c}{1 + 0.5} = c$

AE: "Die Lichtgeschwindigkeit kann durch Zusammensetzung mit einer 'Unbeliebigkeit' nicht geändert werden."

"geschwindigkeit" nicht geändert werden.

## 4.4 Vierergeschwindigkeit und Viererimpuls, Invarianten

Da die Zeit vom Bezugssystem abhängt  
- nicht mehr invariant ist -, wird im

Minkowski-Raum die Bedeutung der  
Geschwindigkeit (Vierergeschwindigkeit) verändert:

Sie ist die Ableitung der 4-d Raum-Zeit-  
Koordinaten nach der invarianten Eigenzeit  $\tau$   
(siehe 4.3), mit  $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$ ,  $x^0 = ct$ :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{cdt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}; \text{ analog } 4\text{-Beschleunigung } a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$$

Das (invariante) Quadrat von  $u^\mu$  wird

$$u^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Analog wird der Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall  $v \ll c$  gehen  
diese Ausdrücke in die gewöhnlichen Formeln  
für Energie und Impuls über, jedoch muss die  
Ruheenergie berücksichtigt werden:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{v \ll c} 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\Rightarrow p^0 = m\gamma \cdot c = \frac{E}{c} \rightarrow \frac{1}{c} (mc^2 + \frac{1}{2}mv^2)$$

dh.  $mc^2 \hat{=}$  Ruheenergie,  $\frac{1}{2}mv^2$  kinet. Energie  
in nichtrelativistischer Näherung, sowie

$$\vec{p} \rightarrow m\vec{v} \quad \text{für den 3-Impuls,}$$

Das invariante Skalarprodukt für den 4-Impuls  
wird

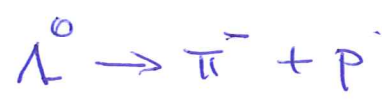
$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (p_\mu p^\mu = p^\mu p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu p^\mu)$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

als relativistische Energie-Impuls-Beziehung, die  
wir in (4.1) bereits benutzt haben.

Anwendung im Teilchenzerfall ( $\rightarrow$  Blatt 8, Aufg. 1)

Beispiel



$$\Lambda^0 = uds, \quad m_{\Lambda^0} = 1.115 \frac{\text{GeV}}{c^2}$$

$$\approx 2182 m_e$$

Energie-Impuls-Bilanz bei  
ruhendem  $\Lambda^0$  vor dem Zerfall:

$$\pi^- = \bar{u}d, \quad m_{\pi^-} = 139.6 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\approx 273 m_e$$

$$m_{\Lambda} c^2 = \sqrt{m_{\pi}^2 c^4 + p_{\pi}^2 c^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + p_p^2 c^2}$$

$$p = uud, \quad m_p = 938.3 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\approx 1836 m_e$$

$$0 = \vec{p}_{\pi} + \vec{p}_p$$

bzw. Gleichung für die 4-Impulse:

$$\boxed{p_{\Lambda}^{\mu} = p_{\pi}^{\mu} + p_p^{\mu}}$$

vier-Impulserhaltung



auflösen nach  $p_p$  und quadrieren ergibt

$$P_P^\mu P_{P\mu} = (P_\Lambda^\mu - P_\pi^\mu)(P_{\Lambda\mu} - P_{\pi\mu}) = m_p^2 c^2$$

$$= P_\Lambda^\mu P_{\Lambda\mu} + P_\pi^\mu P_{\pi\mu} - 2P_\Lambda^\mu P_{\pi\mu}$$

$$\parallel 2m_\Lambda E_\pi = 2(m_\Lambda c, 0) \begin{pmatrix} E_\pi/c \\ -\vec{p}_\pi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_p^2 c^2 = m_\Lambda^2 c^2 + m_\pi^2 c^2 - 2m_\Lambda E_\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{E_\pi = \frac{c^2}{2m_\Lambda} (m_\Lambda^2 + m_\pi^2 - m_p^2)}$$

und analog

$$E_p = \frac{c^2}{2m_\Lambda} (m_\Lambda^2 - m_\pi^2 + m_p^2);$$

Aus der Erhaltung des 4-Impulses lassen sich die relativistischen Gesamtenergien der beim Zerfall entstehenden Teilchen ( $m_\pi, p$ ) berechnen; bei rechenem  $\Lambda^0$  sind sie allein durch die Ruhmassen der Teilchen festgelegt.

Die Impulsbeträge der Zerfallsteilchen folgen aus

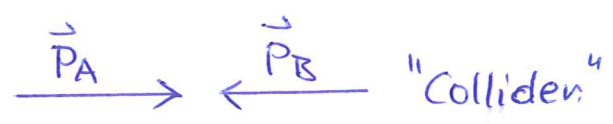
$$\vec{p}_\pi^2 = E_\pi^2/c^2 - m_\pi^2 c^2$$

$$\vec{p}_p^2 = E_p^2/c^2 - m_p^2 c^2$$

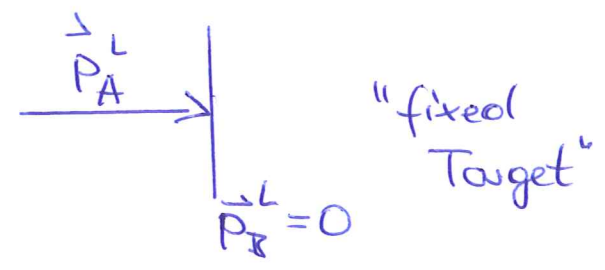
Teilchenkollision (hier ohne Indices für die 4-Vektoren)



Im Schwerpunktsystem (CMS):



Im Laborsystem (LS)



Orterimpulserhaltung:

$$p_A + p_B = p_C + p_D$$

Mit der zusätzlichen Bedingung (relativistische Energie-Impuls-Erhaltung; hier mit  $\hbar = c = 1$ ):

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

$$\Rightarrow p_A^2 = m_A^2, p_B^2 = m_B^2, p_C^2 = m_C^2, p_D^2 = m_D^2$$

Es gibt mehrere Lorentz-invariante Größen,

insbesondere das Quadrat der Schwerpunktbewegung,

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 = (E_A + E_B)^2 - \underbrace{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}_{= 0 \text{ im CMS}}$$

$$= (E_A + E_B)^2$$

Im Laborsystem wird dieselbe Invariante mit

$$P_A^L = (E_A^L, \vec{p}_A^L)$$

$$P_B^L = (E_B^L, \vec{p}_B^L) = (m_B, 0):$$

$$S = (P_A^L + P_B^L)^2 = [E_A^L + m_B]^2 - (p_A^L)^2 = (E_A^L)^2 + 2m_B E_A^L + m_B^2 - (p_A^L)^2$$

und mit  $(E_A^L)^2 - (p_A^L)^2 = m_A^2$

$$\Rightarrow S = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A^L$$

und mit S ist auch die CMS-Energie

$\sqrt{S} \equiv E_{cm}$  relativistisch invariant.

Mit  $(E_A^L)^2 = (p_A^L)^2 + m_A^2$  folgt bei hohen relativistischen Energien mit  $|p_A^L| \gg m_A$ :

$$(E_A^L)^2 \approx (p_A^L)^2$$

$$\Rightarrow S \rightarrow 2m_B |p_A^L|$$

$\Rightarrow$  Die Schwerpunktsenergie wächst im hochrelativistischen Bereich <sup>hier</sup> mit der Wurzel aus dem Laborsystem an,

$$\sqrt{S} \rightarrow \sqrt{2m_B |p_A^L|} \propto \sqrt{|p_A^L|}$$

$\Rightarrow$  Um eine bessere Energieausbeute zu erzielen, verwendet man Colliders statt fixed-Target Maschinen.

## Bewegungsgleichung für Massenpunkte

In 3-Notation (siehe 4.1) ist die Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \gamma m \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \gamma m \vec{v} \right)$$

In 4-Notation:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{dt}, \quad p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$F^\mu$  ist nicht Lorentz-invariant; jedoch ist

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} = \gamma F^\mu \quad \text{invariant,}$$

$$\boxed{\frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma F^\mu} \quad \text{mit der Eigenzeit } \tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma.$$

$F^\mu_{\text{M}} := \gamma F^\mu$  wird als „Minkowski-Kraft“ bezeichnet.

Mit  $E = \left[ \frac{v^2}{c^2} + m^2 c^4 \right]^{1/2}$  ist im Ruhesystem  $\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow E \rightarrow mc^2, \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dp^\mu}{dt} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

Allgemein für  $\vec{v} \neq 0$  ist die Minkowski-Kraft  
 als pro Eigenzeit zugeführte Impuls / die  
 pro Eigenzeit  $\tau$  zugeführte Energie/c.

## 5. Vierdimensionale Formulierung der Elektrodynamik

### 5.1 Feldstärketensor, Maxwell-Gleichungen

In der relativistischen Formulierung der ED fasst man elektrische und magnetische Feldstärke zum Feldstärketensor zusammen, Ladungs- und Stromdichte zu Viererströmungsdichte:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\vec{E} \\ \vec{E} & \mathcal{B} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}^{\dot{j}k} = \epsilon^{ijk} B^k$$

Skalares Potential  $\phi$  und Vektorpotential  $\vec{A}$  hatten wir zum 4-Potential zusammengefasst,

$$(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$$

und mit der 4-Stromdichte

$$(j^\mu) = (c\rho, \vec{j})$$

wird die Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad \text{bzw. mit } \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (\partial_\mu) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right).$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Die 4-Divergenz der 4-Stromdichte verschwindet.

Allgemein ist die 4-Divergenz eines 4-Vektors  $P$  ein 4-Skalar, also Lorentz-invariant:

$$\partial_\mu P^\mu = \partial^\mu P_\mu = \partial'^\mu P'_\mu = \partial'_\mu P'^\mu, \quad P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

Für das 4-Potential  $A^\mu$  mit (siehe S. 5.4 inhomogene MWG)

$\square A^\mu = + \frac{4\pi}{c} j^\mu$  verschwindet die 4-Divergenz in der Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0} \iff \boxed{\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0}$$

Aus dem 4-Potential folgen die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ,

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

dh. im Vergleich zum statischen Fall kommt beim  $\vec{E}$ -Feld der zeitabhängige Term  $\propto \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  hinzu.

Insbesondere ist

$$B^1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \equiv \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2$$

$$E^1 = -\frac{\partial A^0}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \equiv -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1$$

und der antisymmetrische Feldtensor wird

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

mit  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ , und den auf der vorigen Seite definierten Komponenten,  $Sp(F^{\mu\nu}) = 0$

Dabei gibt es in  $A^\mu$  noch die Eichfreiheit

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$$

Mit den Komponenten des Feldtensors  
formulieren wir die Maxwell-Gleichungen in 4d:

Inhomogene Maxwell-Gleichungen (hier: Vakuum,  $\vec{E} \equiv \vec{D}$ ,  $\vec{B} \equiv \vec{H}$ )

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho}$$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} \rho$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}}$$

Die 1-Komponente wird

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1$$

$$\Rightarrow \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \frac{4\pi}{c} j^1$$

und analog für die anderen Komponenten,  
zusammengefasst:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

$$\text{oder } \boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu}$$

inhomogene MWG

Mit der Potentialdarstellung des Feldstärkevektors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{folgt}$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

und in der Lorenz-Eichung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  gilt

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu} \quad \text{inhomogene Maxwell-Gleichungen}$$

Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$\Rightarrow \partial_1 B^1 + \partial_2 B^2 + \partial_3 B^3 = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_1 F^{32} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{12} = 0 = \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} - \partial_3 F^{21}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

Für die x (1-) Komponente

$$-\partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0, \text{ etc. für } y, z (2, 3)$$

$$\Rightarrow \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} = 0$$

Zusammengefasst folgt

$$\boxed{\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0} \quad \text{Bianchi-Identität}$$

(nur für  $\lambda \neq \mu \neq \nu$  sinnvoll, da für mind. 2 gleiche

Indices identisch erfüllt, z.B.  $\lambda=1, \mu=\nu=2$ :

$$\partial_1 F^{22} + \partial_2 F^{21} + \partial_2 F^{12} = 0 + \partial_2 B^3 - \partial_2 B^3 = 0)$$



Mit dem dualen Feldtensor  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  lassen sich die homogenen MWG analog zu den inhomogenen ausdrücken:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

mit 
$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

und dem vollständig antisymmetrischen Levi-Civita Tensor (4. Stufe):

$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = 0$  bei zwei gleichem Indices, sonst  
Vorzeichenänderung bei Transposition  
(Vertauschen zweier Indices; ungerade Permutation)  
 $\epsilon^{0123} = 1 = -\epsilon_{0123}$ , Normierung

$$\epsilon'^{\mu\nu\lambda\rho} = \det(\Lambda) \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}, \det \Lambda = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 1, \text{ LT} \\ +1 \text{ bei eijunklichem LT}$$

so dass

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $\text{Sp}(\tilde{F}^{\mu\nu}) = 0,$   
 $(\tilde{F}^{\mu\nu}) = -(\tilde{F}^{\nu\mu})$

Transformationsverhalten des Feldstärke tensors:

Es ist

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha F^{\beta\gamma} (\Lambda^T)^\gamma_\beta$$

In Matrixschreibweise,

$$F' = \Lambda F \Lambda^T$$

Die Eichtransformation

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi \text{ lässt } F \text{ invariant.}$$

Transformation der Felder: (s. Blatt P, Aufg. 2 und 3)

Für einen "Lorentz-boost" in z-Richtung mit der speziellen LT ( $\Lambda^\mu_\nu$ ) aus 4.3 wird

$$E_1' = F'^{10} = \Lambda^1_\alpha \Lambda^0_\beta F^{\alpha\beta} =$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= \underline{1} \cdot \gamma \cdot F^{10} - \beta\gamma F^{13} = \gamma (F^{10} - \beta F^{13})$$

$$\Rightarrow E_1' = \gamma (E_1 - \beta B_2)$$

und analog

$$E_2' = \gamma (E_2 + \beta B_1), \quad E_3' = E_3$$

$$B_1' = \gamma (B_1 + \beta E_2), \quad B_2' = \gamma (B_2 - \beta E_1), \quad B_3' = B_3$$

oder zusammengefasst für die Komponenten tangential (||) und senkrecht ( $\perp$ ) zum boost:

$$E_{||}' = E_{||}, \quad B_{||}' = B_{||}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma (\vec{E}_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}), \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma (\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E})$$

$\uparrow$  (Vektor in der Ebene  $\perp$  zum boost)

## 5.2 Energie-Impuls Tensor des EM Feldes

Wir gehen aus von der Wahrscheinlichkeit auf eine Ladungs- oder Stromverteilung,

$$\vec{p} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

und stellen sie mit Hilfe des Feldstärke tensors dar, z.B. für die erste Komponente

$$\begin{aligned} p^1 &= \rho E^1 + \frac{1}{c} (j^2 B^3 - j^3 B^2) \\ &= \frac{1}{c} (j^0 F^{10} - j^2 F^{12} - j^3 F^{13}) = \frac{1}{c} j_\nu F^{1\nu} \end{aligned}$$

und analog für die anderen Komponenten

Entsprechend wird der 4-Vektor der Lorentz-Wahrscheinlichkeit

$$p^M = \frac{1}{c} j_\nu F^{M\nu}$$

Die zeitliche Komponente gibt die pro Zeit und Volumen zugeführte Energie an,

$$p^0 = \frac{1}{c} j_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}$$

so dass sich die 4-Wahrscheinlichkeit schreiben lässt als

$$(p^M) = \left( \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \vec{p} \right)$$

Bei Transformationen  $p^M \rightarrow p'^M$  im Minkowski-Raum entsteht eine Mischung aus Coulomb- und Lorentz-Waft.

## Energie-Impuls-Tensor

Wir gehen aus von einer inhomogenen MWG mit einer 4-Stromdichte  $j_\nu$ ,

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

und die 4-Waflendichte

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{c} j_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} \right] \end{aligned}$$

Mit der Antisymmetrie des Feldstärke tensors und der homogenen MWG wird

$$\begin{aligned} F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} - F_{\rho\nu} \partial^\nu F^{\mu\rho}] = \\ &= -\frac{1}{2} F_{\rho\nu} \partial^\mu F^{\nu\rho} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} f^\mu &= \frac{1}{4\pi} \left[ \partial_\sigma (F^{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu) - \frac{1}{4} \partial^\mu (F_{\rho\nu} F^{\rho\nu}) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \partial_\sigma \left[ F^{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} \right] \end{aligned}$$

Und mit Einführung des Energie-Impuls-Tensors des EM Feldes

$$T^{\mu\sigma} := -\frac{1}{4\pi} \left[ F^{\mu\nu} F^\sigma{}_\nu - \frac{1}{4} g^{\mu\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu} \right]$$

wird die 4-Waflendichte

$$f^\mu(x) = -\partial_\sigma T^{\mu\sigma}(x) \quad [T^{\mu\sigma} \text{ symmetrisch in } (\mu, \sigma)]$$

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

Energiedichte:  $T^{00} = \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] \equiv u$

Energiesromdichte:  $T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{1}{c} S^i = T^{i0}$   
(Poynting-Vektor)

Spannungstensor:  $T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} [E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)]$

Energiesatz:

Die 0te Komponente der Kraftdichte ist [mit  $f^\mu = (c\rho, \vec{f})$ ]

$f^0 = \frac{1}{c} \dot{f}_\mu F^{\mu 0} = \frac{1}{c} \dot{f} \cdot \vec{E}$

und die 0te Komponente der Kraftgleichung wird

$f^0 = -\partial_\nu T^{0\nu} = \frac{1}{4\pi} \partial_\sigma (F^{0\nu} F^\sigma_\nu - \frac{1}{4} g^{0\sigma} F_{\rho\nu} F^{\rho\nu}) =$

$f^0 = -\partial_0 T^{00} - \partial_i T^{0i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} u - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$

Energiesatz

↑ zeitl. Änderung der Energiedichte      ↑ Divergenz des Energieflusses

⇒  $f^0$  ist das  $\frac{1}{c}$  fache der Leistungsdichte  
( $\hat{=}$  "Arbeit pro Zeit am Strom")

# Impulssatz

folgt aus den räumlichen Komponenten von  $f^\mu$ :

$$f^i = -\partial_\nu T^{i\nu} = -\partial_0 T^{i0} - \partial_j T^{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} S^i(x) = -f^i(x) - \partial_j T^{ij}(x)}$$

↑	↑	↑
zeitliche Änderung der Impulsdichte des EM Feldes	zeitl. Änderung des Impulses: <u>Kraft</u>	Gradient des Spannungstensors: Impulsflussdichte

## Energie-Impuls-Tensor eines bewegten Elektrons

Im Ruhesystem des Elektrons  $S'$  gibt es nur ein  $\vec{E}$ -Feld,  
kein  $\vec{B}$ -Feld

$$\Rightarrow T^{00} = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 = u \quad \text{Energiedichte}$$

$$T^{i0} = T^{0i} = \frac{1}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{B}]_i = 0 \quad \text{Poynting-Vektor}$$

$$T^{ij} = -\frac{1}{4\pi} [E^i E^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2] \quad \text{Spannungstensor}$$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi} E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1^2 - \frac{1}{2} E^2) & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_2) & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_3) \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_2) & -\frac{1}{4\pi} (E_2^2 - \frac{1}{2} E^2) & -\frac{1}{4\pi} (E_2 E_3) \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} (E_1 E_3) & -\frac{1}{4\pi} (E_2 E_3) & -\frac{1}{4\pi} (E_3^2 - \frac{1}{2} E^2) \end{pmatrix}$$

$$= (T^{\nu\mu}) \quad \text{im System des Beobachters}$$

im Ruhesystem des (bewegten) Elektrons.

### 5.3 Lagrange-Formulierung

Analog zu Mechanik erhält man die Bewegungsgleichungen eines Teilchens im Feld aus der Forderung, dass die Variation der Wirkung  $S$  verschwindet,

$\delta S = 0$ , mit der Wirkung als Zeitintegral über die Lagrange Funktion  $L(t)$ .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[\vec{x}(t), \vec{v}(t); t] \quad \text{mit} \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Dies ist äquivalent zu Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

mit dem kanonischen Impuls  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial v^i}$

Da die Wirkung  $S$  nicht in allen Inertialsystemen gleich ist, verliert diese Formulierung die Lorentz-Invarianz. Jedoch ist

$\bar{L} := \gamma L$  mit  $dt = \gamma d\tau$  ( $\tau$  die Eigenzeit) ein Lorentz-Skalar, der jedoch noch nicht in allen Fällen die korrekte relativistisch invariante Lagrange-Funktion darstellt.

---

⊛ zu unterscheiden vom "kinetischen Impuls"  $\vec{p}_{kin} = \gamma m \vec{v}$

Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen

Der 3-Impuls ist

$$p_i = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{\partial L_0}{\partial v_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

und elementarerechnend die (nicht lorentz-invariante) Lagrange-Funktion  $L_0$  des freien Teilchens

$$L_0 = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(Probe durch Differenzieren:

$$\frac{\partial L_0}{\partial v_i} = -m c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{2} \left( -\frac{2v_i}{c^2} \right) = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_i)$$

Mit  $\tilde{L}_0 := \gamma L_0 = -m c^2$

ergibt sich ein Lorentz-Skalar, der jedoch nicht die korrekte Lagrange-Funktion darstellen kann, da  $c^2$  konstant ist, und  $\frac{\partial \tilde{L}_0}{\partial v_i} = 0$ . Eine konsistente Beschreibung ergibt sich jedoch mit der (ebenfalls Lorentz-invarianten) Lagrange-Funktion

$$\boxed{\bar{L}_0 := -m c \sqrt{u_\mu u^\mu}} \quad \text{mit } u \equiv \sqrt{u^2} = \sqrt{u_\mu u^\mu} = c$$

$$\text{und } \frac{\partial \bar{L}_0}{\partial u^\mu} = -p_\mu \equiv (-p_0, p^i) = -m u_\mu.$$

Variation nach den  $u^\mu$  ergibt die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d}{d\tau} \frac{u_\mu}{\sqrt{u_\nu u^\nu}} = 0, \quad \text{und wg. } u_\nu u^\nu = \text{const}$$

$$\boxed{m \frac{d u^\mu}{d\tau} = 0} \quad \text{Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen, } \tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \text{ Eigenzeit, } dt = \gamma d\tau.$$



## Ankopplung an das EM Feld

Die Lagrange-Funktion zur Ankopplung der Ladung  $q$  an das elektromagnetische Feld ist klassisch (nicht-relativistisch)

$$L_{em} = -q\phi + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

mit der 3-Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der bewegten Ladung.

Mit  $A^\mu \equiv (\phi, \vec{A})$  und  $u^\mu \equiv \gamma(c, \vec{v})$  wird die Lorentz-invariante Lagrange-Funktion für die

Ankopplung ans Feld

$$\bar{L}_{em} = -\frac{q}{c} u_\mu A^\mu = -\frac{q}{c} u^\mu A_\mu$$

und entsprechend die gesamte Lagrange-Funktion

$$\bar{L} = \bar{L}_0 + \bar{L}_{em} = -mc \sqrt{u_\mu u^\mu} - \frac{q}{c} u^\nu A_\nu$$

Die "relativistische" Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \bar{L}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \text{liefert damit}$$

$$-m \frac{du_\mu}{d\tau} - \frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} u^\nu \partial_\mu A_\nu = 0$$

Es ist

$$-\frac{q}{c} \frac{dA_\mu}{d\tau} = -\frac{q}{c} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \partial_\nu A_\mu = -\frac{q}{c} u^\nu \partial_\nu A_\mu$$

und mit dem Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$F_\nu{}^\mu = \partial_\nu A^\mu - \partial^\mu A_\nu : F_\nu{}^\mu = -F_\mu{}^\nu$$

lässt sich das zusammenfassen als

$$-m \frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{q}{c} F_{\nu\mu} u^\nu = 0$$

und mit der Antisymmetrie des Feldstärke tensors folgt

$$\boxed{m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu}$$

Der kanonische Impuls ist ( $i=1,2,3$ )

$$P_i^{\text{kan}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \gamma m v_i + \frac{q}{c} A_i \equiv P_i^{\text{kin}} + \frac{q}{c} A_i$$

und die Hamilton-Funktion (s. Blatt 9, Aufg. 2,3)

$$H = \dot{p}^{\text{kan}} \cdot \vec{v} - L[x(t), v(t); t]$$

$$H = \sqrt{(c\dot{p}^{\text{kan}} - q\vec{A})^2 + m^2 c^4} + q\phi$$

Energieerhaltung ist gleichbedeutend mit einer zeitlich konstanten Hamilton-Funktion,

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

## 5.4 Lagrange-Dichte des EM Feldes

Sei  $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\vec{x}, t)$  die "Lagrange-Dichte" des EM Feldes eines Systems von Punktladungen bei  $x_i$  mit Massen  $m_i$ .

Dann folgt die Lagrange-Funktion durch Integration über den räumlichen Anteil,

$$L(t) = c \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t),$$

und die Wirkung ist

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) = c \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\vec{x}, t) = \int dt L(t)$$

Die Lagrange-Dichte hat 3 Anteile:

- (1) Den mechanischen Anteil der Punktladungen mit Massen  $m_i$ ,

$$\mathcal{L}_0 = - \sum_i m_i c \sqrt{v_i^2/c^2} \int dt_i \delta^4[x - x_i(t_i)]$$

- (2) Die Kopplung der Ladungen ans Feld (wie in 5.3)

$$\mathcal{L}_{em} = - \frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu$$

$$\text{mit } j_\mu(x) = j_\mu(\vec{r}, t) = \sum_i q_i \frac{d}{dt} x_{i\mu} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

4-Stromdichte für Punktladungen

- (3) Den Feldanteil

$$\mathcal{L}_{EM} = - \frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_{EM}(x)}$$

Für eine Punktladung mit  $q_i = q_k = q$   
folgt nach Integration über  $d^4x$  der  $S_{em}$  Anteil  
der Wirkung aus (5.3), mit  $\int j_\mu d^3x = q u_\mu$ :

$$S_{em} = \int d^4x \left( -\frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu \right) = -c \int dt \int d^3x \frac{1}{c^2} A^\mu j_\mu =$$

$$= -\frac{q}{c} \int dt A^\mu u_\mu = \int_{t_1}^{t_2} dt \bar{L}_{em}(t) \quad \square$$

Der Beitrag (3) des freien Feldes ergibt die  
Maxwell-Gleichungen, mit (2) die inhomogenen MWG, z.B.:

Die Wirkung soll extremal unter Variation des  
4-Potentials  $A^\mu$  sein; die Verallgemeinerung  
der Lagrange-Bewegungsgleichung auf Felder  
folgt dann aus der Forderung, dass die Variation von  $S$   
verschwindet.

Dabei ist der Feldstärke-Tensor  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  
so dass die Variation von  $\mathcal{L}(x)$  bezüglich  $A$  ergibt:

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu$$

$$\text{mit } \delta F^{\mu\nu} = \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - F_{\mu\nu} \partial^\nu \delta A^\mu \underset{\substack{\uparrow \\ F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}}}{=} 2F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu$$

$$\Rightarrow \delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu$$

und mit  $S = \int d^4x \mathcal{L}(x)$  folgt die Variation der Wirkung  $S$  nach  $A$ :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ -\frac{1}{4\pi c} F_{\mu\nu} \partial^\mu \delta A^\nu - \frac{1}{c^2} j_\nu \delta A^\nu \right] \\ &= -\int d^4x \frac{1}{4\pi c} \partial^\mu (F_{\mu\nu} \delta A^\nu) + \\ &\quad + \int d^4x \left[ \frac{1}{4\pi c} \partial^\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j_\nu \right] \delta A^\nu \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Der erste Term ist ein Oberflächenkern im 4d-Raum, auf den wir den Gaußschen Satz anwenden:

$$\int d^4x \partial^\mu (\dots)_\mu = \int d^3x (\dots)$$

so dass er für große Oberflächen bei  $x \rightarrow \infty$  verschwindet.

Der zweite Term ergibt für  $\delta S = 0$  die inhomogenen

Maxwell-Gleichungen,

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

bzw.

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

in Lorenz-Eichung

Die homogenen MWG

$$\partial^\mu \hat{F}_{\mu\nu} = 0$$

$$\text{mit } \hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$$

$$\text{sind für } F^{\lambda\rho} = \partial^\lambda A^\rho - \partial^\rho A^\lambda$$

ebenfalls erfüllt, d.h. die gesamte Maxwell-Theorie folgt aus der Forderung, dass die Variation der Wirkung verschwindet: eine relativistische Verallgemeinerung der Euler-Lagrange Gleichung auf Felder.

## 6. Elektromagnetische Wellen

### 6.1 Wellen im Vakuum

Im Vakuum ist  $\rho=0$ ,  $\vec{j}=0$ ,  $\vec{E}=\vec{D}$ ,  $\vec{B}=\vec{H}$ ;

die MWG also

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \dot{\vec{E}} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  die  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder müssen zeitlich wandeln, sein, denn wäre Rotation und Divergenz = 0, ward die Felder verschwinden.

Mit dem Potential  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  als Ursprung der Felder ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Setzen wir aufgrund der Eichfreiheit  $\phi=0$ , wird die MWG für  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (*)$$

übliche Eichtransformationen für das Potential  $A^\mu$  stellen in der Regel die Forderung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad \text{Coulomb-Eichung, oder}$$

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu A^\mu = 0, \quad \text{Lorenz-Eichung,}$$

Allgemein ist die Eichtransformation

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x)$$

mit beliebigem  $\chi(x)$ , in Komponenten:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \phi \rightarrow \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

⇒ In Coulomb-Eichung wird die Gleichung (\*)

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = 0}$$

Wellengleichung (d'Alembert-Gleichung).

Lösungen sind beliebig gefasste Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

d'Alembertsche Lösung für eine räumliche Koordinate:  
( $\vec{A} \rightarrow A^1 \equiv A$ )

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Ausatz  $A(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct)$  mit willkürlichen reellen Funktionen  $F_1, F_2$

Aufangsbedingungen für  $t=0$ :

$$A = f_1(x), \quad \frac{\partial A}{\partial t} = f_2(x)$$

$$\Rightarrow F_1(x) + F_2(x) = f_1(x), \quad t=0$$

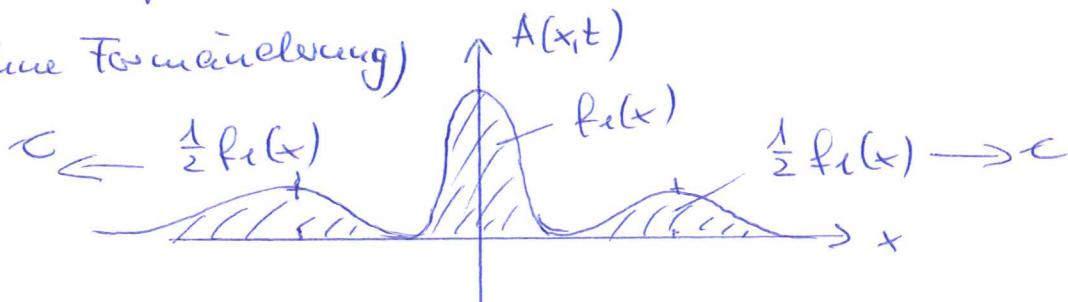
$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x)$$

Integration ergibt

$$F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[ f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]$$

d.h. für  $f_2=0$  läuft  $f_1(x)$  mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  zu Hälfte nach links, zu anderen Hälfte nach rechts

(ohne Formänderung)



Bei periodischen Schwingungen mit Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  
 Frequenz  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$  sind  $F_1, F_2$  trigonometrische Funktionen  
 mit Phasen  $\alpha, \beta$  und Amplituden  $a, b$ :

$$F_1(x+ct) = b \cos(kx + \omega t + \beta) \quad \text{in } (+x) \text{ Richtung}$$

$$F_2(x-ct) = a \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad \text{in } x \text{-Richtung}$$

Bei  $a=b$  ergibt die Überlagerung eine stehende Welle.

Es ist

$$\boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \nu \cdot \lambda} \quad \text{mit der Wellenlänge } \lambda \text{ und der}$$

(kreis-)Wellenzahl  $k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Lorentz-invariante ("kovariante") Herleitung  
der Wellengleichung:

MWG in kovarianten Schreibweise:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu = 0 \quad \text{für } j^\nu = 0$$

und mit  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\mu} - \underbrace{\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{=0} = 0$$

in Lorentz-Eichung ist  $\partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 A^\nu}{\partial x^\mu \partial x^\mu} = 0$$

$$\text{mit } \partial^2 / (\partial x^\mu \partial x^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \equiv \square$$

d'Alembert-Operator



entspricht das der Wellengleichung  
in 4-dimensionaler Darstellung,

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0}, \text{ oder } \boxed{\square A^\nu = 0}$$

Beachte: Bei Herleitung der 4-d Wellengleichung  
haben wir die Lorenz-Eichung verwendet, im  
(3+1)d Fall die Eichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  (Coulomb),  
plus  $\phi = 0$ , aus der  $\partial_\mu A^\mu = 0$  folgt.

## 6.2 Ebene Wellen

Wenn die Wellenprofile  $F_1(x+ct)$ ,  $F_2(x-ct)$  nicht  
von  $y$  und  $z$  abhängen - auf Ebenen  $x = \text{const}$   
konstant sind -, und sich die Welle mit Aus-  
breitungsgeschwindigkeit  $c$  in  $x$ -Richtung  
bewegt,

$$\vec{n} := \frac{\vec{c}}{c} \equiv \vec{e}_x$$

handelt es sich um eine ebene Welle.

In der Eichung  $\phi = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  ist das elektrische  
Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ sowie } \frac{\partial A^x}{\partial x} = 0 \text{ wg. } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0,$$

da  $\vec{A}$  nicht von  $y$  oder  $z$  abhängt.

Aus der Wellengleichung folgt dann

$$\frac{\partial^2 A^x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A^x}{\partial t} = \text{const.}$$

⇒ die  $A^x$  entsprechende Komponente  $E^x$  des elektrischen Feldes ist konstant ⇒  $A^x = 0$  (sonst Widerspruch zur Wellen-ausbreitung des  $\vec{E}$ -Feldes)

⇒ Das Vektorpotential der ebenen Welle steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

Betrachte Wellen, die sich in positiver x-Richtung ausbreiten,  $F_2(x-ct) = A(x,t)$ :

Die Felder hängen nur von  $t-x/c$  ab:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

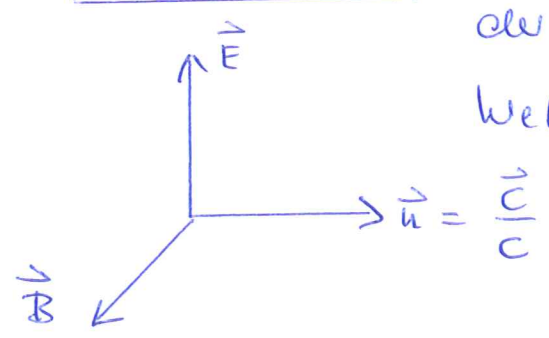
$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \vec{A}' \quad (\vec{A}' \equiv \text{Ableitung nach } t - \frac{x}{c})$$

$$\begin{aligned} B_i &= \left[ \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (t - \frac{x}{c}) A'_k \right] = \epsilon_{ijk} \delta_{j1} A'_k \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) = \\ &= -\frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \left(\frac{-1}{j}\right) A'_k = \left[ -\frac{1}{c} (\vec{n} \times \vec{A}') \right]_i \end{aligned}$$

Mit  $\vec{A}' = -c\vec{E}$  folgt daraus

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$$

dh.  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle, und senkrecht aufeinander



⇒ Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind

Transversalwellen; es ist

$$|\vec{B}| = |\vec{E}|.$$

Als Folge der Transversalität ( $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ) wird für ebene Wellen der Fortpflanzungs-Vektor der Energiedichte

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E})] =$$

$$= \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^2 \cdot \vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{E}] = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 \cdot \vec{n}$$

dh. die Richtung der Energiedichte ist gleich der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle, und ihr Betrag ist  $(c/4\pi) \vec{E}^2$ .

Mit der Energiedichte  $w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{4\pi} \vec{E}^2$  wird

$\vec{S} = c \cdot w \cdot \vec{n}$  : die ebene Welle transportiert ihre Energie mit Lichtgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung  $\vec{n}$

Wellenvektor

Die ebene Welle breitet sich in Richtung  $\vec{n}$  aus,  $F((x-ct) \cdot \vec{n})$  ist konstant auf Ebenen senkrecht zu  $\vec{n}$ . Sie lassen sich beschreiben durch den

4-Wellenvektor

$$k^\mu := \frac{\omega}{c} (1, \vec{n}) \equiv \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$$

mit dem 3-Wellenvektor  $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n}$ , und dem Betrag  $k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (1 - \vec{n}^2) = 0$ .

Die Ebenen zu konstantem  $F$  sind dann

$$k_{\mu} x^{\mu} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \text{const}, \text{ oder } \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const}!$$

der Wellenvektor  $\vec{k}$  ist der Gradient der Phase,

$$\vec{k} = -\vec{\nabla} (k_{\mu} x^{\mu})$$

und die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Welle ist

$$\vec{v} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = c \cdot \vec{n} : \text{Phasengeschwindigkeit: } k dx - \omega dt = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c$$

Jede zweimal differenzierbare Funktion der Phase

$k_{\mu} x^{\mu}$  ist eine Lösung der Wellengleichung,

Insbesondere gilt das für die harmonischen

Funktionen  $F(k_{\mu} x^{\mu}) = e^{-i k_{\mu} x^{\mu}}$ ,

die eine vollständige Orthonormalbasis im

Raum der Eigenfunktionen des d'Alembert-

Operators  $\square$  bilden.

Sie stellen monochromatische ebene Wellen dar:

$$\square e^{-i k_{\mu} x^{\mu}} = 0$$

Die Lösungen sind ebene Wellen zu festem  $\vec{k}$  und  $\omega = c|\vec{k}|$ . Jedes andere Wellenprofil lässt

sich aus solchen monochromatischen Wellen

durch vierdimensionale Fouriers Transformation

erzeugen,

$$G(x^{\mu}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \cdot \tilde{G}(k^{\mu}) e^{-i k_{\mu} x^{\mu}}$$

Die elektrische und magnetische Feldstärke einer ebenen monochromatischen Welle lassen sich wegen  $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$  ausdrücken als

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ E_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right]$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[ B_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \right]$$

und mit  $\vec{\nabla}\vec{E} = i\vec{k}\vec{E}$ ,  $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}$  (analog für  $\vec{B}$ )

wenden die MWG für monochromatische ebene Wellen

$$\left. \begin{aligned} +i\vec{k} \times \vec{E} &= +\frac{i\omega}{c} \vec{B} \\ i\vec{k} \times \vec{B} &= -\frac{i\omega}{c} \vec{E} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \vec{B}, & \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{k} \times \vec{B} &= -\frac{\omega}{c} \vec{E}, & \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}}$$

und wegen  $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  sind die Wellen transversal.

Die Kombination der ersten beiden MWG ergibt

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}$$

$$\text{und mit } \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = (\vec{k}\vec{E})\vec{k} - (\vec{k}\cdot\vec{k})\vec{E} = -\vec{k}^2\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k_\mu k^\mu = 0}$$

Dispersionsrelation zwischen Kreisfrequenz  $\omega$  und (kreis-)wellenvektor  $\vec{k}$ .

Die Dispersionsrelation folgt auch direkt aus der Wellengleichung für  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ ,

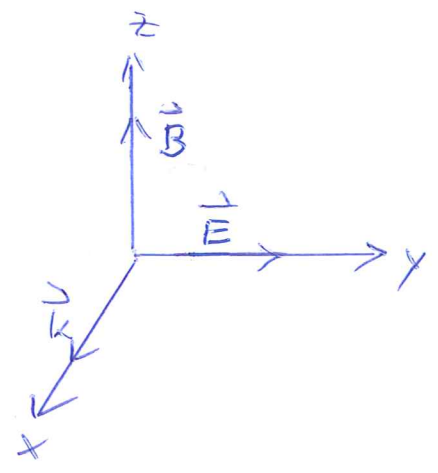
$$\square\vec{E} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right] \vec{E} = 0$$

$$\left( -\frac{\omega^2}{c^2} + \vec{k}^2 \right) \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \square$$

# Polarisation ebener Wellen

Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  definieren ein Dreibein:



zeigt  $\vec{k}$  in x-Richtung, liegt  $\vec{B}$  wegen  $\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}$  in z-Richtung.

Zur Beschreibung der Welle reicht aufgrund der Beziehung zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Angabe des  $\vec{E}$ -Feldes. Der Vektor  $\vec{E}$  liegt in einer Ebene senkrecht zu  $\vec{k}$  (x-Richtung), die durch die Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  mit  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$

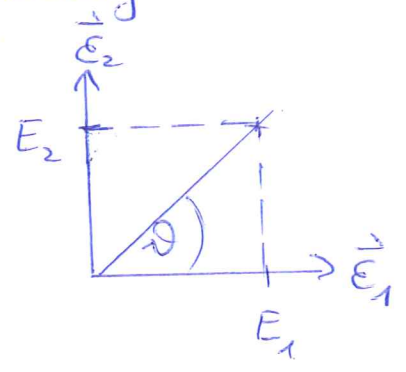
aufgespannt wird:

$$\vec{E} = (E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k}x - \omega t)}$$

mit i.a. komplexen Amplituden  $E_1$  und  $E_2$ , da es eine Phasenverschiebung geben kann.

Linear polarisiert nennt man die Welle,

wenn die Wellenzüge keine Phasenverschiebung haben, so dass der Winkel zwischen  $\vec{E}$  und der  $\vec{e}_1$ -Achse



$$\vartheta = \arctan \frac{E_2}{E_1} \text{ Winkel,}$$

und die Amplitude

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \text{ Die Richtung der Schwingung ist konstant.}$$

Elliptische Polarisation ist die Welle, wenn die Wellenzüge eine Phasenverschiebung  $\varphi$  haben, so dass

$$\vec{E} = E_1 \vec{e}_1 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + E_2 \vec{e}_2 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)}$$

Für die Realteile ist  $(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, |\vec{e}_1|^2 = |\vec{e}_2|^2 = 1)$

$$E_1(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{e}_1 \cdot \vec{E}) = E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

$$E_2(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{e}_2 \cdot \vec{E}) = E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t + \varphi)$$

und mit  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

$$\Rightarrow E_2(\vec{x}, t) = E_2 [\cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \cos\varphi - \underbrace{\sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}_{\equiv \alpha} \sin\varphi]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_1(\vec{x}, t)}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{x}, t)}{E_2}\right)^2 = \cos^2\alpha + (\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi)^2$$

$$\rightarrow 1 \text{ für } \varphi = \pm \frac{\pi}{2} (2n+1).$$

$\Rightarrow$  Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen  $E_1, E_2$ :

Der  $\vec{E}$ -Vektor läuft auf einer Ellipse um die Ausbreitungsrichtung  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ .

Zirkular polarisiert ist eine Welle

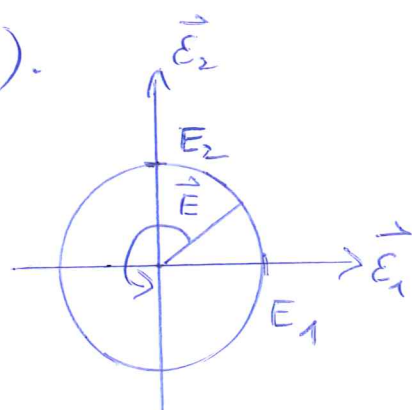
für  $E_1 = E_2$  und  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ :

$$E_1(\vec{x}, t) = E_1 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$$

$$E_2(\vec{x}, t) = E_2 \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega t \pm \frac{\pi}{2})$$

$$= \pm E_2 \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t);$$

$\Rightarrow$  der  $\vec{E}$ -Vektor läuft auf einem Kreis um d. Ausbreitungsrichtung  
je nach Vorzeichen von  $\varphi$  rechts- oder links- zirkular polarisiert.



## 6.3 Elektromagnetische Wellen in Materie

Zunächst untersuchen wir die Wellenausbreitung in homogenen, unendlich ausgedehnten Medien mit Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und Permeabilität  $\mu$ ,

so dass

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}; \quad \sigma = \text{Leitfähigkeit}$$

In neutralen Medien verschwindet die freie Ladungsdichte  $\rho = \rho_f = 0$ , und die MWG werden

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \dot{\vec{H}}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\epsilon}{c} \dot{\vec{E}} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned}$$

Wellen in Medien lassen sich durch die Telegrafengleichungen beschreiben, die für  $\sigma = 0$  (in Isolatoren) in normale Wellengleichungen übergehen:

Die Rotation der 2. MWG ist

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} = \\ &= -\Delta \vec{H} \end{aligned}$$

und mit der 1. MWG:

$$-\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\Delta \vec{H}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \dot{\vec{H}}$$



und analog

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \dot{\vec{E}}$$

Für  $\sigma = 0$  folgen aus den beiden Telegraphengleichungen die Wellengleichungen in Isolatoren:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = 0$$

mit der Lichtgeschwindigkeit im Medium

$$\frac{1}{c} \equiv \frac{c}{v_{\epsilon, \mu}}$$

und dem Brechungsindex

$$n := \frac{c}{\hat{c}} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

Oft gilt  $\mu \approx 1 \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}$ . Für sichtbares Licht und transparente Medien ist  $1 \leq n \leq 2$ . Für Röntgenstrahlen und in Plasmen  $n \leq 1$ .

Die Dispersionsrelation für Isolatoren mit  $(\mu, \epsilon)$

wird

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\hat{c}^2} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \epsilon \cdot \mu \frac{\omega^2}{c^2}$$

mit  $\epsilon \geq 1$  (Vakuum 1.0, Luft 1.00059, Wasser 77)

$\mu > 1$  in Paramagnetika

$\mu \gg 1$  in Ferromagnetika

$0 \leq \mu < 1$  in Diamagnetika (Kupfer:  $1 - 6.4 \cdot 10^{-8}$ , Blei  $\sim 0.999$ )  
 $\mu \approx 0.99999936$

dh. für  $\mu < 1$  kann die Phasengeschwindigkeit des Lichts  $\hat{c}$  im Medium ( $\equiv$  Geschwindigkeit des Wellenfrent)  $> c$  werden.

Die Geschwindigkeit des Photons (Signalgeschwindigkeit) ist jedoch durch die Gruppengeschwindigkeit bestimmt, die stets  $\leq c$  ist (beim normalen Dispersionsverlauf, s.u.).

## Phasen- und Gruppengeschwindigkeit:

↗ bzw.  $\hat{c}$  in Medien 1

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c$  ist die Phasengeschwindigkeit der Welle, d.h. ihre

Phase  $\varphi = \vec{k}\vec{x} - \omega t$  schreitet mit  $c$  fort. In einer Dimension ist der Ort gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten gegeben durch

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow k dx - \omega dt = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c} \quad \text{Phasengeschwindigkeit}$$

Für monochromatische Wellen mit  $\omega = \text{const}$  ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung.

Bei Überlagerung von Wellen verschiedener (beobachtbarer) Frequenz zu einem Wellenpaket ist dessen Gruppengeschwindigkeit  $u$  i.a. von  $c$  verschieden,

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit}$$

Sie ist z.B. eine wichtige Größe in der Wellenmechanik, wo die de Broglie-Wellenlänge eines Elementarteilchens umgekehrt proportional zur Gruppengeschwindigkeit ist,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot u} \Rightarrow u = h / (m \lambda).$$

Nur bei dispersionslosen Wellenausbreitung fallen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zusammen, so dass eine Wellengruppe ohne Formänderung fortbewegt kann;

$$\omega = ck$$

$$\Rightarrow d\omega = c dk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = c \equiv u$$

dispersionslos: die Phasengeschwindigkeit hängt nicht von der Wellenlänge  $\lambda$  bzw. der Wellenzahl  $k = 2\pi/\lambda$  ab.

Im allgemeinen ist jedoch

$$d\omega = c dk + k dc \quad | : dk$$

$$u = \frac{d\omega}{dk}; \quad k = 2\pi \lambda^{-1}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow u = c + k \frac{dc}{dk}$$

$$\text{Es ist } \frac{dc}{dk} = \frac{dc}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{dc}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

$$\Rightarrow k \frac{dc}{dk} = -\lambda \frac{dc}{d\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}}$$

Zusammenhang Gruppen / Phasengeschwindigkeit

keine Dispersion:  $\frac{dc}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = c$

normale Dispersion:  $\frac{dc}{d\lambda} > 0 \Rightarrow u < c$

anomale Dispersion:  $\frac{dc}{d\lambda} < 0 \Rightarrow u > c$

(in diesem Fall breitet sich Information jedoch mit einer Signalgeschwindigkeit  $v < c$  aus, die von der Gruppengeschwindigkeit  $u$  verschieden ist).

### 6.3.1 Elektromagnetische Wellen in Leitern

Wir betrachten zunächst homogene Leiter mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  [ $1/s$ ], und der Stromdichte

$$\vec{j} \equiv \vec{j}_f \text{ der freien Ladungen } \rho \equiv \rho_f,$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}. \text{ Für die meisten Leiter gilt } \mu \approx 1, \text{ und}$$

wir setzen hier  $\mu \equiv 1$ , so dass  $\vec{H} \equiv \vec{B}$ , und die

MWG für  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  wird

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \epsilon \dot{\vec{E}} = \frac{4\pi}{c} \sigma \vec{E}}$$

Für die Ausbreitung monochromatischer ebener

Wellen im Leiter mit Kreisfrequenz  $\omega$  und

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t} \equiv \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\rho = \rho_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_0(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \left( \frac{i\omega}{c} \epsilon - \frac{4\pi}{c} \sigma \right) \vec{E}_0 = 0$$

Wir führen eine komplexe Dielektrizitätskonstante ein als

$$\boxed{\epsilon(\omega) := \epsilon - \frac{4\pi}{i\omega} \sigma}$$

so dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}_0 = 0$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

ergibt andererseits

$$-i\omega \rho_0 + \nabla \cdot \vec{j}_0 = 0, \text{ so dass mit } \vec{D}_0 = \epsilon \vec{E}_0, \nabla \cdot \vec{D}_0 = 4\pi \rho$$

$$\text{und } \rho_0 = \frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \vec{j}_0 \text{ folgt}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}_0 = 4\pi \rho_0 = \frac{4\pi}{i\omega} \nabla \cdot \vec{j}_0 = \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \nabla \cdot \vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \left( \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega} \right) \nabla \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\boxed{\epsilon(\omega) \nabla \cdot \vec{E}_0 = 0}$$

Die Ergebnisse für die Dispersionsrelation von Trolataven lassen sich auf leicht übertragen, wenn wir  $\epsilon$  durch  $\epsilon(\omega)$  ersetzen:

$$\boxed{k^2 = \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}} \text{ für Leitw., } k = \sqrt{\epsilon(\omega)} \frac{\omega}{c}$$

Für reelle Kreisfrequenz  $\omega$  wird der Wellenvektor  $\vec{k}$  komplex, da  $\epsilon(\omega)$  komplex ist (die Feldstärke  $\vec{E}$  ist stets reell):

$$\sqrt{\epsilon(\omega)} \equiv n + ie,$$

$$k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{c} |n + ie| \quad [e = \kappa(\omega)]$$

und mit

$$e^{ikz} = e^{i\omega n z/c - \omega \kappa z/c}$$

ergibt sich wegen des Dämpfungsterms

$e^{-\omega \kappa z/c}$  eine gedämpfte Welle.

Aufgrund der Dämpfung fällt die Amplitude der  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder auf einer Strecke

$$\boxed{d \equiv \frac{c}{\omega \cdot k}} \text{ auf } 1/e \text{ ab; man nennt } d \text{ die Eindringtiefe.}$$

In  $\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$  ist für hinreichend kleine

Frequenzen  $\omega$ :  $\frac{4\pi\sigma}{i\omega} \gg \epsilon \Rightarrow \epsilon(\omega) \approx -\frac{4\pi\sigma}{i\omega}$

$$\Rightarrow \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx \sqrt{-\frac{4\pi\sigma}{i\omega}} = (1+i) \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

$$\uparrow \\ \text{wg. } (1+i)^2 = 2i = -\frac{2}{i}$$

$$\Rightarrow \text{mit } \sqrt{\epsilon(\omega)} = n + ik: n = k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}} \text{ Eindringtiefe}$$

Mit  $d \propto 1/\sqrt{\omega}$  wird die Eindringtiefe bei höheren Frequenzen klein! Die Wellen breiten sich nur im Außenbereich des Metalls aus

Beispiel Kupfer:  $\sigma = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$

für  $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1}$  (Frequenz  $\nu = 50 \text{ Hz}$ )

$$\Rightarrow d \approx \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm}}{\sqrt{2\pi \cdot 5.8 \cdot 10^{17} \cdot 2\pi \cdot 50}} = \frac{3}{33.84} \cdot 10 \text{ cm} \\ \approx 0.088 \text{ cm} \approx 9 \text{ mm}$$

für  $\nu = 5 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ :  $d \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$ .

## Frequenzabhängige Leitfähigkeit $\sigma(\omega)$

Im allgemeinen ist nicht nur die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon(\omega)$ , sondern auch die Leitfähigkeit von der Frequenz abhängig:  $\sigma = \sigma(\omega)$ .

Wir untersuchen ein einfaches Modell für  $\sigma(\omega)$ : Die Leitfähigkeit kommt durch die Bewegung von Elektronen mit Masse  $m \equiv m_e = 9.11 \text{ keV}/c^2$  und Ladung  $q = -e$  zustande; sie sind infolge der Stöße mit anderen Teilchen einer Reibungswert  $\propto \dot{x}$  ausgesetzt.

$\Rightarrow$  Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m \ddot{x} = q \cdot \vec{E} - \frac{m}{\tau} \dot{x}}$$

Die Relaxationszeit  $\tau$  ist umgekehrt proportional zum Reibungskoeffizienten,  $\tau \propto \frac{1}{\beta}$

Für freie Ladungsträger mit Dichte  $\rho \equiv \rho_f$  ist die Ladungstromdichte  $\vec{j} \equiv \vec{j}_f$ :

$$\vec{j} = \rho \cdot \dot{x} \equiv n_0 \cdot q \cdot \dot{x}, \quad n_0 = \text{Dichte der Ladungen } q$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n_0 \cdot q} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = q \cdot \vec{E} - \frac{m}{n_0 \cdot q \cdot \tau} \vec{j}$$

Im stationären Fall  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$  ist mit  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  die

statische Leitfähigkeit

$$\boxed{\sigma_0 = \frac{n_0 \cdot q^2 \cdot \tau}{m}}$$

Die Bewegungsgleichung ist  $\left( \frac{n_0 \cdot q \cdot \tau}{m} \right)$

$$\tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_0 \cdot q^2 \cdot \tau}{m} \vec{E} - \vec{j}$$

läßt sich mit der statischen Leitfähigkeit  $\sigma_0$  also schreiben als

$$\tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \sigma_0 \vec{E} - \vec{j}$$

Für eine periodische Zeitabhängigkeit  $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-i\omega t}$ ,  
 $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$  folgt

$$(1 - i\omega\tau) \vec{j}_0 = \sigma_0 \vec{E}_0$$

bzw.

$$\vec{j}_0 = \sigma(\omega) \vec{E}_0, \quad \sigma(\omega) \equiv \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$$

und die komplexe Dielektrizitätskonstante wird mit der frequenzabhängigen Leitfähigkeit

$$\epsilon(\omega) = \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{i\omega(1 - i\omega\tau)}$$

Bei niedrigen Frequenzen  $\omega\tau \ll 1$  gilt näherungsweise das gleiche Ergebnis wie für frequenzunabhängige Leitfähigkeit mit  $\sigma \rightarrow \sigma_0$ ; bei hohen Frequenzen  $\omega\tau \gg 1$  folgt

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &\approx \epsilon - \frac{4\pi\sigma_0}{\tau\omega^2} = \epsilon - \frac{4\pi n_0 q^2}{m\omega^2} = \\ &= \epsilon \left( 1 - \frac{4\pi n_0 e^2}{\epsilon m \omega^2} \right) = \epsilon \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \end{aligned}$$



mit der sog. Plasmafrequenz

$$\omega_p = \left[ \frac{4\pi n_0 e^2}{\epsilon \cdot m} \right]^{1/2}$$

Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz,  $\omega < \omega_p$ ,  
 wird  $\epsilon(\omega)$  negativ, d.h.  $\sqrt{\epsilon(\omega)} = n + i\kappa$  ist  
 rein imaginär mit  $n=0$  und

$$\kappa = \left[ \epsilon \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) \right]^{1/2} i$$

die Welle ist mit  $e^{-\omega \kappa z / c}$  exponentiell gedämpft,  
 es gibt keinen oszillierenden Anteil.

Für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz,  $\omega > \omega_p$ ,  
 ist  $\epsilon > 0$ , so dass  $\kappa = 0$ :  $\sqrt{\epsilon(\omega)} = n$  ist reell mit

$$n = \left[ \epsilon \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \right]^{1/2}$$

Bei diesen hohen Frequenzen gibt es keine Dämpfung,  
 der Leiter wird "transparent".

Bei Kupfer ist  $1/\tau = 3.7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ ,  $\sigma_0 = 5.8 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$ ,  
 $\omega_p = 1.6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$

Sichtbares Licht ist im Frequenzbereich  $\omega = 2.4 - 5.2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$   
 d.h.  $\omega < \omega_p$ : Kupfer ist undurchsichtig, jedoch transparent für  
harte Röntgenstrahlen,

In Elektrolyten ist dagegen die Ladungsdichte  
 $n_0$  klein und  $m$  größer, so dass die Plasmafrequenz  
 niedriger ist

⇒ Elektrolyte sind wg.  $\omega > \omega_p$  in der Regel  
 durchsichtig.

# Plasmaschwingungen

Für  $\omega = \omega_p$  ist  $\epsilon(\omega) = 0$ , so dass die Gleichung

$$\epsilon(\omega) \vec{\nabla} \vec{E}_0 = 0$$

longitudinale elektrische Wellen zulässt

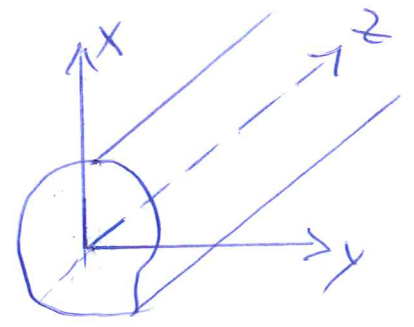
$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(k_z z - \omega_p t)} ; \vec{B} = 0.$$

Sie entsprechen Schwingungen der Ladungsträger ohne Reibung, d.h. ungedämpften Schwingungen des  $\vec{E}$ -Feldes in Richtung der Wellenausbreitung.

Dies sind die Eigenschwingungen eines Plasmas; die Plasmaschwingung in einem Metall ist eine kollektive longitudinale Anregung des Leitungselektronen-"gases".

## 6.3.2 Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern

Für  $\rho(\vec{x},t) = 0, \vec{j}(\vec{x},t) = 0$  und  $\epsilon = \mu = 1$  (Vakuum) im Inneren des Hohlleiters gelten die freien MWG



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

die symmetrisch sind bezüglich der Vertauschung  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \vec{B} \rightarrow \vec{E}$ , siehe (6.1) Wellen im Vakuum.

Elementarproblem ist der Ansatz für  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}, t) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0(\vec{x}, t) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

Die Bestimmung der x- und y-Komponente des Feldes lässt sich auf die Bestimmung der z-Komponente zurückführen.

Einsetzen in die MWG ergibt 4 gekoppelte Gleichungen für  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$ ,  $B_{0x}$ ,  $B_{0y}$ , daraus durch Linearkombination, und mit

$$k_{\perp}^2 := \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2$$

folgt eine Relation zwischen den (x, y) und z-Komponenten

$$k_{\perp}^2 (\vec{e}_x E_{0x} + \vec{e}_y E_{0y}) = ik_z \vec{\nabla} E_{0z} - i \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} B_{0z}$$

$$k_{\perp}^2 (\vec{e}_x B_{0x} + \vec{e}_y B_{0y}) = ik_z \vec{\nabla} B_{0z} + i \frac{\omega}{c} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} E_{0z}$$

Die Gleichungen für die z-Komponenten folgen durch Einsetzen der Ansätze in die Wellengleichungen

$$\square \vec{E} = 0, \quad \square \vec{B} = 0 \quad \text{als}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) E_{0z}(x, y) = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_{\perp}^2 \right) B_{0z}(x, y) = 0$$

Zur Lösung sind die Randbedingungen auf dem Hohlleiter erforderlich:

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \quad \vec{B}_{\perp} = 0 \quad \text{auf dem Rand, d.h. } \vec{E} \cdot \vec{B} \Big|_{\text{Rand}} = 0$$

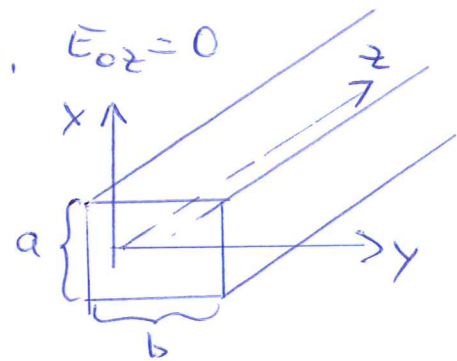
Beachte: Wellenausbreitung im Hohlleiter findet wegen

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2 > 0 \quad \text{nur oberhalb einer kritischen Frequenz statt, } \omega > \omega_{\text{cr}} = ck_{\perp}$$

## Transversal elektrische Wellen im Hohlleiter (TE-Moden)

Das  $\vec{E}$ -Feld steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Hohlraumwelle,

Beispiel: Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt, Seitenlängen  $a, b$



$E_{0z} = 0$  im gesamten Hohlraum,

$E_{||} = 0$  auf dem Rand

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + k_{\perp}^2) B_{0z}(x, y) = 0$$

Separationsansatz  $B_{0z}(x, y) = g_1(x) g_2(y)$

$\Rightarrow$  DGL 2. Ordnung für  $g_1, g_2$ ; Lösungsansätze

$$g_1(x) = B_0 \cos(c_1 x + \varphi_1)$$

$$g_2(y) = \cos(c_2 y + \varphi_2)$$

Zur Erfüllung der RB muss  $\vec{\nabla} B_{0z} = 0$  auf dem Rand gelten:

$$\vec{\nabla} B_{0z} = \begin{pmatrix} g_1'(x) g_2(y) \\ g_1(x) g_2'(y) \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \text{ auf dem Rand}$$

$$\Rightarrow g_1'(0) = g_1'(a) = 0$$

$$g_2'(0) = g_2'(b) = 0$$

$\Rightarrow$  Lösung für die z-Komponente:

$$B_{0z}(x, y) = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\text{mit } k_{\perp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$\text{kritische Frequenz } \omega_{cr} = \frac{c\pi}{\max\{a, b\}}$$

$$m, n \in \mathbb{N}$$

$$m \geq 0, n \geq 0$$

$$m+n \geq 1$$

Analog TM-Moden mit  $B_{0z} = 0$

$$E_{0z}(x, y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

### 6.4 Wellenpakete

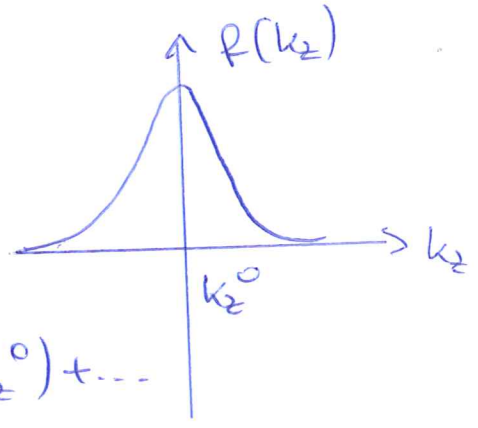
Die bisherige Beschreibung galt für ebene monochromatische Wellen zu festem  $|\vec{k}|$ , bzw. fester Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  ("einfarbig").

Signale werden jedoch durch Wellenpakete übertragen, die aus unterschiedlichen Fourierkomponenten mit einer Verteilung der Wellenvektoren entsprechend  $f(\vec{k})$  bestehen.

Bei Ausbreitung der Welle in z-Richtung wird der Vektor des elektrischen Feldes mit  $\vec{k} \equiv (0, 0, k_z)$

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z f(k_z) e^{i[k_z \cdot z - \omega(k_z)t]}$$

Die Verteilungsfunktion  $f(k_z)$  hat bei  $k_z = k_z^0$  ein Maximum und fällt für andere  $k_z$ -Werte rasch ab.



Eine Entwicklung von  $\omega(k_z)$  um  $k_z^0$  ergibt:

$$\omega(k_z) = \omega(k_z^0) + \left. \frac{d\omega(k_z)}{dk_z} \right|_{k_z=k_z^0} (k_z - k_z^0) + \dots$$

mit  $\frac{d\omega}{dk_z} \equiv u$  Gruppengeschwindigkeit, d.h. die (Signal-) Geschwindigkeit, mit der sich das ganze Wellenpaket bewegt (siehe 6.3).

In linearer Näherung ist demnach

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y) e^{i[k_z^0 \cdot z - \omega(k_z^0) t]} \cdot f(z-ut)$$

mit

$$f(z-ut) = \int dk_z f(k_z) e^{i(k_z - k_z^0)(z-ut)}$$

Die Phase im Vorfaktor ist

$$\varphi = k_z^0 \cdot z - \omega(k_z^0) \cdot t ; \text{ sie bewegt sich mit der}$$

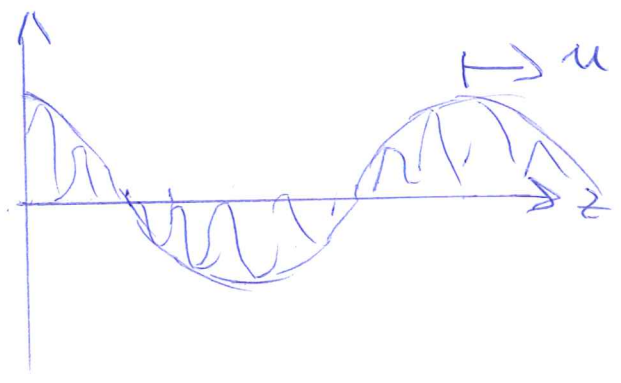
Phasengeschwindigkeit

$$v_{Ph} = \frac{dz}{dt} \Big|_{\varphi} = \frac{\omega(k_z^0)}{k_z^0} \equiv c$$

Die z-Abhängigkeit der Amplitude steckt in der Funktion

$$f(z-ut) :$$

Das Wellenpaket bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit  $u$  in (positive) z-Richtung.



Bei Hohlleitern mit  $\omega = c \sqrt{k_z^2 + k_{\perp}^2}$ ,  $k_{\perp}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$

gilt für Wellenpakete:

$$v_{Ph} = c \frac{\sqrt{(k_z^0)^2 + k_{\perp}^2}}{k_z^0} > c$$

$$u = c \frac{k_z^0}{\sqrt{(k_z^0)^2 + k_{\perp}^2}} < c$$

# Beispiel Gaußscher Wellenpaket

Ist die Welle mit einer Gaußfunktion moduliert,

$$f(k_z) = e^{-\frac{(k_z - k_z^0)^2}{(2/a)^2}}$$

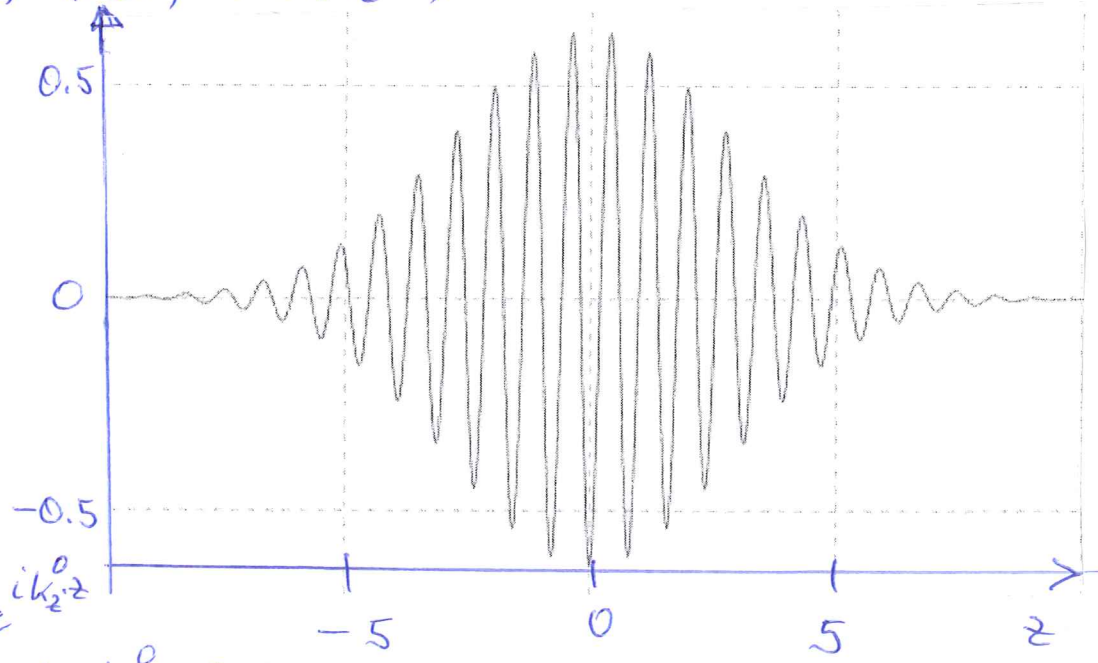
läßt sich das Integral zum Zeitpunkt  $t=0$  analytisch lösen,

$$\vec{E}(\vec{x}, t=0) = \vec{E}_0(x, y) \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z e^{-\frac{(k_z - k_z^0)^2}{(2/a)^2}} e^{ik_z \cdot z}$$

$$= \vec{E}_0(x, y) \cdot \underbrace{\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}}_{\equiv A(z)} \cdot e^{-z^2/a^2} \cdot e^{ik_z^0 \cdot z}$$

dh. es ergibt sich eine Gaußfunktion im Ortsraum, in der Ausbreitungsrichtung der Welle: Die Amplitude der Welle ist nur noch in einem Bereich deutlich von Null verschieden. Mathematisch gesprochen: Die Fouriers-Transformation einer Gaußfunktion ( $\equiv$  die Frequenzverteilung im  $k$ -Raum) ergibt wieder eine Gaußfunktion ( $\equiv$  die Amplitudenverteilung im Ortsraum).

$$\psi(z) = A(z) \cdot \cos(k_z \cdot z)$$



[hier dargestellt

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{-z^2/a^2} e^{ik_z^0 \cdot z}$$

mit  $a=4$ ,  $k_z^0 = 8$  in dimensionlosen Einheiten

Bei Dispersion ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle frequenzabhängig - z.B. bei Licht in Materie - und das Wellenpaket zerläuft, d.h. die räumliche Breite wächst mit der Zeit, die Unbestimmtheit (in der Lokalisierung: z.B. bei Wellenpaketen, die ein Teilchen darstellen) wird größer.

Wellenpakete ohne Dispersion behalten ihre Form; man nennt sie Solitonen.

Elektromagnetische Wellen breiten sich über einen großen Wellenlängenbereich von wenigen Zentimetern bis zu einigen Kilometern (Frequenzbereich 20 kHz - 2 GHz) mit konstanter Geschwindigkeit aus, es gibt dort keine Dispersion und demnach kein Zerlaufen des Wellenpakets. (Beispiel: kurze Spannungsimpulse laufen durch ein Koaxialkabel, werden am offenen Ende reflektiert und laufen zurück, ohne dass ihre Form sich ändert. Obwohl Verluste bewirken jedoch eine gewisse Amplitudenabnahme).



Fouriertransformation

Bei der Darstellung des Wellenpaketes als Integral über eine Verteilungsfunktion im  $\vec{k}$ -Raum haben wir implizit die Fourier-Transformation benutzt, die sich für eine Funktion  $f(\vec{x})$  allgemein darstellen lässt (für quadratintegrierbare Funktionen) als

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

mit der Fourier-Transformierten  $\tilde{f}(\vec{k})$ , für die gilt:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^3x f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}}$$

Die ("inverse") Fouriertransformation von  $\tilde{f}(\vec{k})$  ergibt wieder die Ausgangsfunktion (siehe Weierstraßblatt, Aufg. 1a); die Delta-Distribution ist dabei

$$\delta^3(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

Die Fourier-Transformation ist hier eine unitäre Abbildung vom Ortsraum ( $\vec{x}$ ) in den  $\vec{k}$ -Raum.

Analog gibt es eine kontinuierliche Fourier-Transformation vom  $t$ -Raum in den Frequenzraum,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad \text{und} \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} f(t) e^{+i\omega t}$$

Allgemein lässt sich jedes Wellenprofil aus monochromatischen Wellen zu festem  $\vec{k}$  und  $\omega = c|\vec{k}|$  durch vierdimensionale Fouriertransformation erzeugen, siehe (6.1; Seite 6.7)

$$f(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu \tilde{f}(k^\mu) e^{-ik_\mu x^\mu}$$

mit  $k_\mu x^\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ .

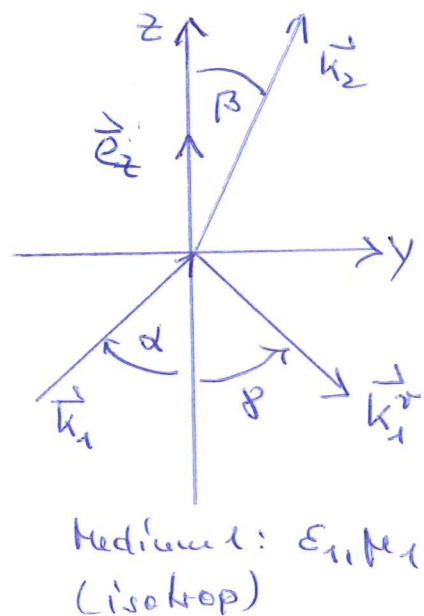
## 6.5 Reflexion und Brechung an Grenzflächen

Trifft eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien, Medium 2:  $\epsilon_2, \mu_2$  wird in der Regel ein Teil reflektiert; der Rest dringt ins Medium ein.

Die Medien sind durch  $(\epsilon_1, \mu_1)$  und  $(\epsilon_2, \mu_2)$  charakterisiert.

Die Grenzfläche ist bei  $z=0$ , der Wellenvektor der einfallenden Welle ist  $\vec{k}_1$ , der reflektierten  $\vec{k}_1^r$  und der transmittierten  $\vec{k}_2$ .

Die Winkel der Wellenvektoren mit dem Normalenvektor  $\vec{e}_z$  sind  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Sofern es keine Flächenladungen an der Grenzfläche der beiden Medien gibt, sind die Transversalkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$ ,

$D_{\perp}$ ,  $B_{\perp}$  stetig an der Grenzfläche,

und die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ :

$E_{\parallel}$ ,  $H_{\parallel}$  stetig an der Grenzfläche.

Die einfallende Welle ist gegeben durch

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{x}_1 - \omega_1 t)}$$

sowie mit der Dispersionsrelation für nichtleitende Medien

$$k_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \frac{\vec{k}_1 \times \vec{E}_1}{k_1}$$

(siehe 6.1, Seite 6.8 und 6.3)

Die reflektierte Welle wird

$$\vec{E}_{1r} = \vec{E}_{1r}^0 e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{x}_{1r} - \omega_{1r} t)}$$

$$\vec{B}_{1r} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \frac{\vec{k}_{1r} \times \vec{E}_{1r}}{k_{1r}}$$

und die ins Medium 2 eindringende Welle

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^0 e^{i(\vec{k}_2 \vec{x}_2 - \omega_2 t)}$$

$$\vec{B}_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{k_2}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche

$$E_{||}^1 = E_{||}^2, H_{||}^1 = H_{||}^2, D_{\perp}^1 = D_{\perp}^2, B_{\perp}^1 = B_{\perp}^2$$

folgt, dass  $\forall t$  die Phasenfeldwerte bei  $z=0$  gleich sein müssen:

$$e^{i(\vec{k}_1 \vec{x} - \omega_1 t)} = e^{i(\vec{k}_2 \vec{x} - \omega_2 t)} = e^{i(\vec{k}_{1r} \vec{x} - \omega_{1r} t)}$$

so dass

$$\vec{k}_1 \vec{x} - \omega_1 t = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_2 t + 2\pi m_2 = \vec{k}_{1r} \vec{x} - \omega_{1r} t + 2\pi m_1$$

mit  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

Insbesondere muss dies gelten für  $m_{1r} = m_2 = 0$ , und bei  $\vec{x} = 0$  (dort trifft die Welle auf die Grenzschicht)

$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \omega_{1r} \equiv \omega$ : die Frequenz bleibt bei Brechung und Reflexion gleich.

Wegen  $\vec{k}_1 \vec{x} = \vec{k}_2 \vec{x} = \vec{k}_{1r} \vec{x}$  liegen  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_{1r}$  in einer Ebene (= Einfallsebene)

Für einen (beliebigen) Punkt auf der y-Achse  $\vec{x} = y \vec{e}_y$  ergibt das

$$k_1 y \sin \alpha = k_{1r} y \sin \beta = k_2 y \sin \beta$$

und mit der Gleichheit der Frequenzen folgt

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} = k_{1r}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$$

so wie

$$\boxed{\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta \Rightarrow \alpha = \beta \\ \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}}$$

oder

$$\boxed{n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta}$$

Einfallswinkel = Ausfallswinkel bei Reflexion

mit den Brechungsindizes

$$n_k = \sqrt{\epsilon_k \mu_k}, \quad k=1,2$$

Snelliusches Brechungsgesetz.

7. Felder bewegter Ladungen; elektrodynamische Potentiale

7.1 Inhomogene Wellengleichung und Greensfunktion  
Zur Beschreibung bewegter Ladungen mit Ladungsdichten  $\rho(\vec{x}, t)$  und Stromdichten  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  müssen wir eine inhomogene Wellengleichung lösen,

$$\boxed{\square A^\mu = + \frac{4\pi}{c} j^\mu}, \text{ mit } \square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2.$$

Sie folgt aus den MWG mit Quellen

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

Analog zur homogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0,$$

die aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

in der Lorenz-Eichung der Potentiale folgt,

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Das Problem lässt sich mit Hilfe der Greenschen Funktionen lösen. Anders als in der Elektrostatik hängt sie bei dynamischen Problemen jedoch von Ort und Zeit ab:

$$\square G(\vec{r}_i, t_i; \vec{r}'_i, t'_i) = +4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G(\vec{r}_i, t_i; \vec{r}'_i, t'_i) = +4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

dh. der d'Alembert-Operator wirkt nur auf die ungeschickenen Koordinaten. (G entspricht dem Potential eines in Raum und Zeit punktförmigen Ist die Greensfunktion bekannt, folgt die Quelle)

Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu = + \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

als

$$A^\mu(\vec{r}_i, t) = \frac{1}{c} \int G(\vec{r}_i, t; \vec{r}'_i, t') \cdot j^\mu(\vec{r}'_i, t') d^3r' dt'$$

da

$$\begin{aligned} \square A^\mu(\vec{r}_i, t) &= \frac{1}{c} \int \square G(\vec{r}_i, t; \vec{r}'_i, t') j^\mu(\vec{r}'_i, t') d^3r' dt' \\ &= + \frac{4\pi}{c} \int \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') j^\mu(\vec{r}'_i, t') d^3r' dt' \\ &= + \frac{4\pi}{c} j^\mu(\vec{r}_i, t) \quad \square \end{aligned}$$

## Bestimmung der Greenfunktion

Wir stellen die Deltafunktion und die Greenfunktion durch ihre Fouriertransformierten dar:

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}$$

entsprechend für die Greenfunktion

$$G(\vec{r}_i, t; \vec{r}'_i, t') = \int d^3k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}') - i\omega(t-t')}$$

mit der Fourier-Transformierten  $\tilde{G}(\vec{k}, \omega)$ .

Anwendung des d'Alembert-Operators auf  $G$  ergibt

$$\begin{aligned} \square G(\vec{r}_i, t; \vec{r}'_i, t') &= \int d^3k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \cdot e^{-i\omega(t-t')} \\ &\equiv +4\pi \delta^3(\vec{r}-\vec{r}') \delta(t-t') \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den Fouriertransformierten der Deltafunktionen in  $\vec{r}$  und  $t$  folgt

$$\tilde{G}(\vec{k}, \omega) \left( \vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = \frac{4\pi}{(2\pi)^4} = \frac{1}{4\pi^3}$$

und die Fourier-Transformierte der Greenfunktion wird

$$\boxed{\tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\vec{k}^2 - \omega^2/c^2}}$$

und die Greenfunktion ist

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \int d^3k \int d\omega \frac{c^2}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2} e^{i[k(\vec{r}-\vec{r}') - \omega(t-t')]}$$

Sie beschreibt den Effekt einer Ladung am Ort  $\vec{r}'$  zu Zeit  $t'$  auf den Punkt  $\vec{r}$  zu Zeit  $t$ .

Aus Kausalitätsgründen muss  $t \geq t'$  sein, so dass

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0 \text{ f\u00fcr } t < t'$$

die Ladung zu Zeit  $t'$  wirkt auf Zeiten  $t \geq t'$ , und die Bestimmung von  $G$  mit funktions-theoretischen Methoden soll diese Bedingung

ber\u00fccksichtigen. Bei gegebenem 4-Strom  $J^\mu$  folgt dann das 4-Potential  $A^\mu$  wie beschrieben.

### 7.2 Bestimmung der Greenfunktion mit funktions-theoretischen Methoden

Setze  $\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\tau := t - t'$

$$G(\vec{R}, \tau) = \int d^3k \int d\omega \frac{c^2}{4\pi^3} \frac{1}{k^2 c^2 - \omega^2} e^{i(\vec{k}\vec{R} - \omega\tau)}$$

und betrachte zun\u00e4chst die  $\vec{k}$ -Integration;  $\mathcal{I} = \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{k^2 c^2 - \omega^2}$

$$\mathcal{I} := \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\vec{R}}}{k^2 c^2 - \omega^2} = \int_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty k^2 dk \frac{e^{ikR\cos\vartheta}}{k^2 c^2 - \omega^2} =$$



$$I = 2\pi \int_0^{\infty} k^2 dk \frac{e^{ikR} - e^{-ikR}}{ikR} \cdot \frac{1}{(kc+\omega)(kc-\omega)} =$$

$$= \frac{2\pi}{iR} \int_{-\infty}^{+\infty} k dk \frac{e^{ikR}}{(kc+\omega)(kc-\omega)}, \quad \text{da das Integral symmetrisch, bei Vertauschung } k \rightarrow -k \text{ ist.}$$

$$I = \frac{\pi}{iRc} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikR} \left[ \frac{1}{kc+\omega} + \frac{1}{kc-\omega} \right], \quad \text{mit } \frac{2kc}{(kc+\omega)(kc-\omega)} = \frac{1}{kc+\omega} + \frac{1}{kc-\omega}$$

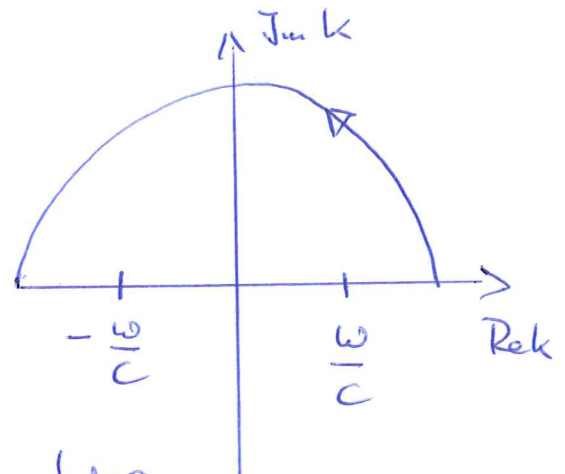
$$= \frac{\pi}{iRc} \cdot I_1$$

Das Integral  $I_1$  hat 2 Pole bei  $k = \pm \frac{\omega}{c}$ .

Wir lösen es durch Konturintegration in der komplexen  $k$ -Ebene,

$$k = \operatorname{Re} k + i \operatorname{Im} k$$

$$e^{ikR} = e^{iR \cdot \operatorname{Re} k} e^{-R \operatorname{Im} k}$$



Ein Integral über einen geschlossenen Weg in der komplexen Ebene verschwindet, wenn keine Pole eingeschlossen sind. Liegen Pole im ungeschlossenen Bereich, lässt sich das Integral nach dem Residuensatz auswerten.

Wir verwenden hier die entsprechenden Definitionen und Sätze aus der Theorie der komplexen Funktionen.

## Residuum

Hat eine analytische\* (= differenzierbare) Funktion  $f(z)$  mit  $z \in \mathbb{C}$  in  $z=a$  eine isolierte Singularität, dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) =: \text{Res} [f(z); z_0]$$

das Residuum von  $f(z)$  bei  $a$ .

Beispiel: Sei  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ ; einfacher Pol in  $z = \pm ia$

$$\begin{aligned} \text{Res} [f(z); +ia] &= \lim_{z \rightarrow ia} \left[ (z - ia) \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iz}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ia} \end{aligned}$$

$$\text{analog ist } \text{Res} [f(z); -ia] = -\frac{e^a}{2ia}$$

## Cauchy'scher Integralsatz

Sei  $f(z)$  analytisch (holomorph) auf  $G \subset \mathbb{C}$  und  $C$  eine einfach geschlossene Kurve, dann ist

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

---

\* Eine analytische Funktion ist lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben. Im komplexen sind die Eigenschaften analytisch und holomorph äquivalent.

## Residuensatz

Sei  $f(z)$  eine auf  $G \subset \mathbb{C}$  außer in endlich vielen Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_N$  analytische Funktion und  $C$  eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, die ganz in  $G$  liegt und die Singularitäten  $a_k$  umschließt, dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} [f(z); a_k]$$

Anwendung auf die Berechnung bestimmter Integrale:

Ist  $f(z)$  für  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$  (obere Halbebene) mit Ausnahme endlich vieler singulärer Punkte  $a_1, \dots, a_N$  analytisch und ist  $z = \infty$  eine mindestens 2fache Nullstelle von  $f(z)$ , so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} [f(z); a_k]$$

Beispiel :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \left[ (z-i) \frac{1}{1+z^2} \right] = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i}$

$$= \frac{2\pi i}{2i} = \underline{\underline{\pi}}$$

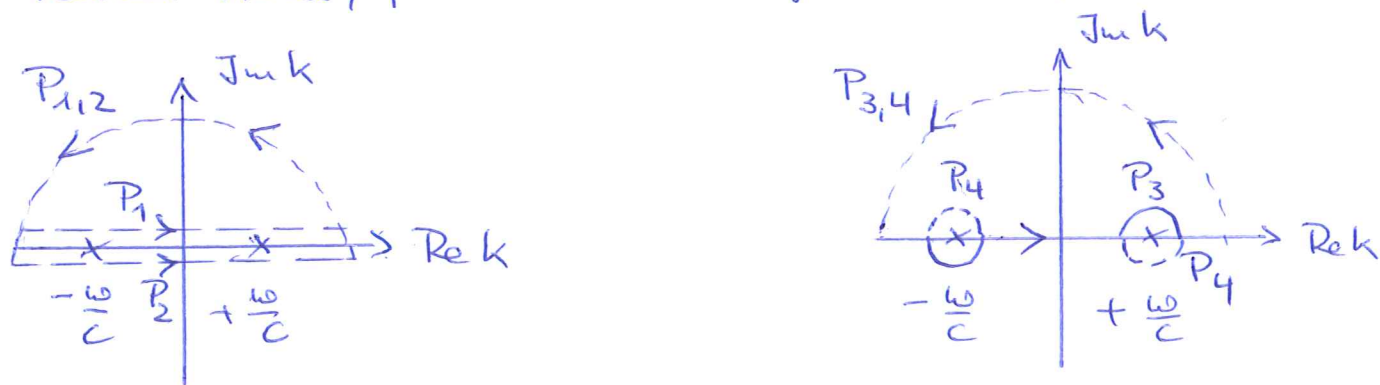
(beachte: der singuläre Punkt  $z = -i$  liegt in der unteren Halbebene  $\Rightarrow$  sein Residuum wird nicht berücksichtigt.)

## Berechnung des Integrals $I_1$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikR} \left[ \frac{1}{kc+\omega} + \frac{1}{kc-\omega} \right] ; I = \frac{\pi}{iRc} I_1$$

Die Anteile zum Integral  $I_1$  in der komplexen Ebene gehen wegen  $e^{-R \cdot \text{Im} k}$  gegen Null, wenn das Integral in der oberen Halbebene geschlossen wird (denn dort ist  $\text{Im} k > 0$ ).

Das Integral ist dann gleich seinem Wert längs der reellen Achse, für den es 4 Möglichkeiten gibt:



Die Pole bei  $k = \pm \frac{\omega}{c}$  werden in der komplexen Ebene oberhalb oder unterhalb umgangen. Wegen der Symmetrie des Integrals zwischen  $+k$  und  $-k$  soll jeweils (entweder) ein oder der andere Pol im Integrationsgebiet liegen (die Integration läuft längs der reellen Achse vom negativen in den positiven Bereich, die Pole werden wechselseitig umlaufen).

Es ist für den Weg längs

$$P_1: I_1 = 0 \quad (\text{wg. Cauchischer Integralsatz})$$

$$P_2: I_1 = \frac{2\pi i}{c} \left[ e^{-i\frac{\omega}{c}R} + e^{+i\frac{\omega}{c}R} \right] \quad (\text{entfällt, da beide Pole umschlossen})$$

$$P_3: I_1 = \frac{2\pi i}{c} e^{-i\frac{\omega}{c}R} \quad (k = -\frac{\omega}{c})$$

$$P_4: I_1 = \frac{2\pi i}{c} e^{+i\frac{\omega}{c}R} \quad (k = +\frac{\omega}{c})$$

Für die Gesamt-Greenfunktion folgt

$$\begin{aligned}
G(\vec{r}, \tau) &= \frac{c^2}{4\pi^3} \cdot \frac{\pi}{iRc} \cdot \frac{2\pi i}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \cdot e^{\pm i\frac{\omega}{c}R} \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(\tau \mp R/c)} \\
&= \frac{1}{R} \cdot \delta(\tau \mp R/c)
\end{aligned}$$

bzw.

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta\left(t-t' \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

⇒ Die Greenfunktion ist nur für  $t' = t \mp \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$  von Null verschieden.

Zur avancierten Greenschen Funktion mit  $t' = t + \frac{|\vec{r}|}{c}$  trägt nur  $t' > t$  bei ⇒ der Beitrag zum Potential  $A^\mu(\vec{r}, t)$  hängt von  $f^\mu(\vec{r}', t')$  zu späterer Zeit ab ⇒ es wird eine "Wirkung in die Vergangenheit" beschrieben, die in der Regel unphysikalisch ist, jedoch in der relativist. Quantenfeldtheorie eine Rolle spielt.

Die retardierte Greensche Funktion mit  $t' = t - \frac{|\vec{r}|}{c}$  ist die physikalische (in der ED) relevante Lösung; die Wirkung breitet sich von  $(\vec{r}', t')$  nach  $(\vec{r}, t)$  mit Lichtgeschwindigkeit aus (d.h. in die Zukunft - siehe Minkowski-Diagramm). Wegen der Verzögerung der Wirkung heißt die Lösung retardiert. Die Laufzeit ist  $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ .

Mit der Greensfunktion folgt das

retardierte 4-Potential  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ , mit  $J^\mu = (c\rho, \vec{j})$ :

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{J^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

mit

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

(s. Blatt 11, Aufg. 3)

Die Wirkung von Ladungen  $\rho$  und Strömen  $\vec{j}$  ist demnach umso mehr verzögert, je weiter sie vom Ausgangspunkt  $\vec{r}'$  entfernt ist.

Für die allgemeine Lösung des Problems muss zur speziellen Lösung, die wir mit Hilfe der Greensfunktion gefunden haben, noch die homogene Lösung (ebene Wellen) addiert werden.

Durch die endliche Laufzeit elektromagnetischer Information hängt also das Potential - und damit die Wagt auf ein Teilchen bei  $(\vec{r}, t)$  - von der Position des Teilchens zu früheren Zeiten  $t' = t - \frac{R(t')}{c}$  ab: ein auf dem Mond beschleunigtes Teilchen „spürt“ diese Beschleunigung <sup>ausch</sup> 1.5 Sekunden später auf der Erde.

### 7.3 Liénard-Wiechert Potentiale für bewegte Punktladungen

Als Folge der Retardierung sind die elektrodynamischen Potentiale im allgemeinen Fall schwer zu berechnen: Man muss über Ladungen und Ströme auf dem Rückwärtslichtkegel des Ereignisses bei  $(\vec{r}', t')$  integrieren, um das Potential am Ort  $\vec{r}$  zu erhalten.

Für bewegte Punktladungen  $q$ , deren Trajektorie  $\vec{r}_q(t)$  (Bahn) man kennt, lassen sich die Potentiale jedoch exakt berechnen. (A.H. Liénard 1898, E. Wiechert 1900). Sie sind relativistisch invariant, jedoch nicht für die Beschreibung von Quantenphänomenen (z.B. Bahn eines Elektrons im Atom ohne Strahlungsemission) geeignet - das erfordert eine quantenelektrodynamische Beschreibung.

Ladungs- und Stromdichte des Teilchens auf der Trajektorie  $\vec{r}_q(t)$  sind

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \vec{v}(t) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_q(t))$$

Einsetzen in

$$A^\mu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') j^\mu(\vec{r}', t') d^3r' dt'$$

mit der Greensfunktion

$$G(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})$$

ergibt für das skalare Potential mit  $j^0 = c\rho$

$$\phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \delta(t-t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) \rho \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}_q(t'))$$

Die  $\vec{r}'$  Integration ergibt

$$\phi(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|} \delta(t'-t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|}{c})$$

Substituiere

$$w \equiv t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|}{c}$$

$$= t' - t + \frac{1}{c} [(x-x_q(t'))^2 + (y-y_q(t'))^2 + (z-z_q(t'))^2]^{1/2}$$

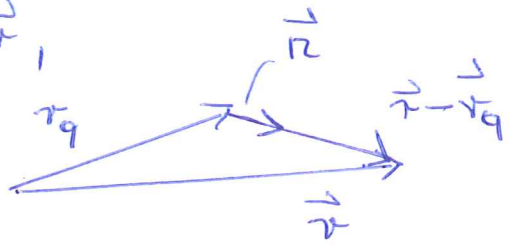
die Ableitung nach  $t'$  wird

$$\frac{dw}{dt'} = 1 - \frac{1}{c|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|} [(x-x_q)\dot{x}_q + (y-y_q)\dot{y}_q + (z-z_q)\dot{z}_q]$$

$$= 1 - \frac{[\vec{r}-\vec{r}_q(t')] \cdot \dot{\vec{r}}_q(t')}{c|\vec{r}-\vec{r}_q(t')|} \equiv 1 - \frac{\vec{n}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c}$$

mit dem Einheitsvektor der Ladung zum betrachteten Punkt  $\vec{r}$ ,

$$\vec{n} := \frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$$





Mit  $dw = \left(1 - \frac{\vec{u}(t') \cdot \vec{v}(t')}{c}\right) dt'$  wird das skalare Potential

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{dw}{1 - \frac{\vec{u}(t'(w)) \cdot \vec{v}(t'(w))}{c}} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t'(w))|} \delta(w(t'))$$

⇒ nur  $w=0$  trägt bei

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{u}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}}$$

wobei  $w=0$  für die ursprüngliche Integrationsvariable  $t'$  bedeutet

$$t' = w + t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t')|}{c} \xrightarrow{w=0} t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c}$$

Die Ladung  $q$  bestimmt demnach das Potential  $\phi(\vec{r}, t)$  aufgrund ihrer früheren Bewegung und Position zu retardierten Zeiten  $t_r < t$ .

Analog folgt für das Lienard-Wiechertsche Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q \vec{v}(t_r)}{c |\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \frac{1}{1 - \frac{\vec{u}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}} \Bigg|_{t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c}}$$

Dies sind die - bis auf Quanteneffekte - exakten Potentiale für bewegte Ladungen.

Mit den Abkürzungen (implizite Gleichungen)

$$\vec{R} := \vec{r} - \vec{r}_q(t_{tr}), \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_{tr})}{c}; \quad t_{tr} = t - \frac{R(t_{tr})}{c}, \quad R = c|t - t_{tr}| \equiv |\vec{R}|$$

lassen sich die Liénard-Wiechert Potentiale vereinfacht schreiben als (mit  $|\vec{r} - \vec{r}_q| \cdot \vec{n} = \vec{r} - \vec{r}_q = \vec{R}$ ):

$\phi(\vec{r}, t) = \frac{qc}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} = \frac{q}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}$
$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\vec{v}}{Rc - \vec{R} \cdot \vec{v}} = \frac{q\vec{\beta}}{R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}}; \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}(t_{tr})}{c}, \quad \vec{A} = \vec{\beta}\phi$

Das elektrische und magnetische Feld lassen sich aus diesen Potentialen bestimmen via

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(oder auch aus der unintegrierten Form des Potentials).

Die - im allgemeinen Fall sehr umfangreiche - Berechnung des Feldes ergibt jeweils zwei Terme;

der erste beschreibt Nahfeldeffekte der Ladung bei gleichförmiger Bewegung und berücksichtigt die zur Lorentz-Invarianz erforderlichen Retardierungseffekte; er ist  $\propto 1/R^2$  Der zweite Term erscheint nur bei beschleunigter

Bewegung und beschreibt Abstrahlungseffekte der mit  $\vec{\beta}$  beschleunigten Ladung; sie sind  $\propto 1/R$ .

## 7.4 Felder bewegter Punktladungen, Larmor-Formel (7.15)

Die  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Felder ergeben sich (aus der umkehrpraktischen Form des Potential, hier ohne Beweis) als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \cdot \frac{(1-\beta^2)(\vec{R}-R\vec{\beta})}{(R-R\vec{\beta})^3} + q \cdot \frac{\vec{R} \times [(\vec{R}-R\vec{\beta}) \times \dot{\vec{v}}]}{c^2 (R-R\vec{\beta})^3}$$

↑  
Nahfeldterm; richtet das Feld nach der instantanen Position der bewegten Ladung aus,  $\propto 1/R^2$

↑  
Strahlungsterm; erscheint nur bei beschleunigter Ladung,  $\propto 1/R$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Das Magnetfeld steht also senkrecht auf dem elektrischen Feld, und auch auf dem Verbindungsvektor vom Beobachter und bewegter Ladung.

Die Nebenbedingungen sind

$$R(t_r) = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad t = t_r + R/c, \quad \vec{v} = \vec{v}(t_r) \text{ bzw. } \vec{\beta} = \vec{\beta}(t_r).$$

Bei konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}(t_r) = \text{const} = \vec{\beta}c$  fällt der Strahlungsterm weg, und das Ergebnis vereinfacht sich erheblich:

$$\text{Mit } \vec{s} := \vec{R} - R\vec{\beta} \text{ wird}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = q \frac{(1-\beta^2) \cdot \vec{s}}{(R - R\beta)^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} = \frac{\vec{s}}{R} \times \vec{E} + \beta \times \vec{E}, \text{ und wg. } \vec{s} \times \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\beta} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

In erster Ordnung in  $\beta$  folgt

$\vec{E}(\vec{r}, t) \approx q \frac{\vec{s}}{s^3}$
$\vec{B}(\vec{r}, t) \approx q \vec{\beta} \times \frac{\vec{s}}{s^3}$

Mit der Ladung  $q$  mitbewegtes Coulomb-Feld

Von der zeitlichen Änderung des  $\vec{E}$ -Feldes infolge der bewegten Ladung erzeugtes Magnetfeld

[Verwende L'Hôpital-Beweis durch Einsetzen, mit Deltaidentitäten]

$$s^2 - (\vec{s} \times \vec{\beta})^2 = (R - R\beta)^2, \text{ so dass}$$

$$\vec{E} = q (1-\beta^2) \vec{s} / [s^2 - (\vec{s} \times \vec{\beta})^2]^{3/2} \approx q \vec{s} / s^3 \text{ in 1. Ordnung } \beta]$$

Sowohl  $\vec{E}$ - als auch das  $\vec{B}$ -Feld sind  $\propto 1/R^2$

Das Poynting-Vektor der Energiedichte

(s. Kap. 5.2)

ist demnach

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \propto 1/R^4, \text{ analog}$$

die Energiedichte

$$u = \frac{1}{8\pi} [\vec{E}^2 + \vec{B}^2] \propto 1/R^4.$$

Für beschleunigte Punktladungen

verschwindet der zweite Term im elektrischen Feld ( $\propto 1/R$ ) nicht; er stellt das Strahlungsfeld dar.

Zur Vereinfachung soll die Geschwindigkeit der Ladung zum Zeitpunkt der Messung nichtrelativistisch sein,

$v(t_r) \ll c$ , so dass der  $R\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}$  Term vernachlässigt wird,

die Beschleunigung  $(\dot{\vec{\beta}})$  muss jedoch nicht klein sein.

Die Strahlungsfelder sind in dieser Näherung

$$\vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) = q \frac{\vec{R} \times (\vec{R} \times \dot{\vec{\beta}})}{c^2 R^3} = q \frac{(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{R} - R^2 \dot{\vec{\beta}}}{c^2 R^3}$$

$$\vec{B}_{\text{str}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) = q \frac{\dot{\vec{\beta}} \times \vec{R}}{c^2 R^2}$$

Die Beschleunigung erzeugt polarisierte Strahlung,  
sog. Bremsstrahlung.

Wählen wir die  $z$ -Achse in Richtung der Beschleunigung  $\dot{\vec{\beta}}$ , wird der Poynting-Vektor für die Energiedichte des Strahlungsfeldes

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\text{str}}(\vec{r}, t) &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{str}}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_{\text{str}}(\vec{r}, t) = \\ &= \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{str}}^2(\vec{r}, t) \cdot \frac{\vec{R}}{R} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{q^2}{c^4 R^6} [(\vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{R} - R^2 \dot{\vec{\beta}}]^2 \frac{\vec{R}}{R} \\ &= \dots = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \vartheta}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \vartheta}{R^2} \vec{e}_R \end{aligned}$$

Die Energiedichte des Strahlungsfeldes ist  $\propto 1/R^2$ . Die Energie, die pro Zeiteinheit  $dt$  (des Beobachters) in den Raumwinkel  $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$  abgestrahlt wird, ist

$$dW = \underbrace{R^2}_{\text{Flächenelement}} \frac{d\Omega}{R^2} \cdot \vec{S}_{\text{str}} \cdot dt = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\ddot{\vartheta}^2}{c} \sin^2\vartheta d\Omega dt$$

Pro Zeiteinheit des Beobachters wird demnach die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel ( $P = \frac{dW}{dt}$ )

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\ddot{\vartheta}^2}{c} \sin^2\vartheta$$

Daraus folgt die abgestrahlte Leistung einer langsam bewegten, beschleunigten Punktladung durch Oberflächenintegration

$$P = \frac{q^2 \ddot{\vartheta}^2}{4\pi c^3} \int d\Omega \sin^2\vartheta$$

Mit  $\int d\Omega \sin^2\vartheta = \int d\Omega (1 - \cos^2\vartheta) = 2\pi \int d(\cos\vartheta) \cdot \frac{1}{(1 - \cos^2\vartheta)}$

und  $t = \cos\vartheta$

$$\Rightarrow \int d\Omega \sin^2\vartheta = 2\pi \int_{-1}^{+1} dt (1 - t^2) = 2\pi \left[ t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{-1}^{+1} = 2\pi \left[ 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{8\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{\ddot{\vartheta}^2}{c}}$$

Nichtrelativistische Larmor-Formel (J.J. Larmor 1897, zwischen Physik und Mathematik)

- Berechnet man mit der Larmor-Formel die Abstrahlung eines Atoms aufgrund der beschleunigten Bewegung der Elektronen um den Kern, erhält man eine mittlere Lebensdauer von  $\tau \approx 6 \cdot 10^{-11} n^6$  s (n die Hauptquantenzahl der Elektronen), d.h. das Atom wäre instabil:

Die klassische ED darf nicht auf Quantenphänomene angewandt werden.

- Im Betatron, Synchrotron oder Zyklotron erfolgt die Beschleunigung auf der Kreisbahn durch ein äußeres Magnetfeld  $\vec{B}_a$  über die Lorentz-Kraft,

$$\vec{\dot{v}} = \frac{q}{mc} \vec{v} \times \vec{B}_a, \text{ mit } \vec{v} \perp \vec{B}_a$$

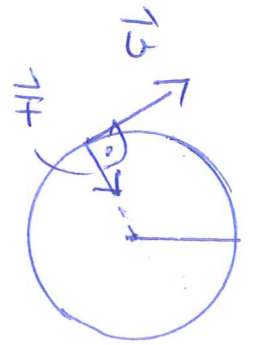
und die abgestrahlte Leistung wird bei einer (nichtrelativistischen) kinetischen Energie der beschleunigten Teilchen von

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \text{ (hier näherungsweise mit der nichtrel. Larmor-Formel)}$$

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}^2 = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{q^2}{m^2 c^2} v^2 B_a^2 = \frac{4q^4}{3m^3 c^5} E_k B_a^2 \propto E_k$$

⇒ Die abgestrahlte Leistung ist proportional zur kinetischen Energie der beschleunigten Teilchen.

- Abweichend von der vorstehenden Berechnung der Abstrahlung dürfen (insbesondere in Teilchenbeschleunigern) die Geschwindigkeiten der strahlenden Ladungen nicht vernachlässigt werden. Die Nenner des Ausdrucks für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ ,  $1/(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3$ , werden dann in Vorwärtsrichtung klein, und der Lichtkegel wird in Bewegungsrichtung gebogen (Synchrotronstrahlung).



- Die Ableitung der relativistischen Larmor-Formel - ohne die bisherigen Näherungen, aus einer Lorentz-invarianten Liénard-Wiechert-Potentialen - ist wesentlich komplizierter. Man erhält

$$P = \frac{2q^2}{3c(1-\beta^2)^3} \left[ \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right].$$

relativistische Larmor-Formel

(erstmal abgeleitet von A.H. Liénard 1898).

Sie enthält den Effekt der Perseveranz  $\vec{\beta}$  und der Beschleunigung  $\dot{\vec{\beta}}$  auf die abgestrahlte Leistung.

Aufgrund der Proportionalität zu  $\gamma^6 = 1/(1-\beta^2)^3$  ist die Abstrahlung für  $\beta \ll 1$  gering; für  $\beta \rightarrow 1$  strahlt das beschleunigte Teilchen jedoch sehr große Anteile seiner relativistischen Energie als elektromagnetische Wellen ab.



Stehen Geschwindigkeit und Beschleunigung  
senkrecht aufeinander (wie auf der Kreisbahn),  
 wird die abgestrahlte Leistung um den  
 Term  $(\frac{\vec{v}}{c} | \frac{\vec{v}}{c} |)^2$  reduziert: Je schneller die Bewegung,  
 umso stärker die Reduktion.

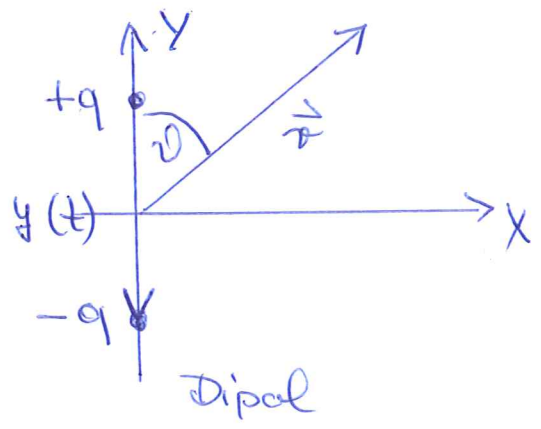
Durch den Term  $1/(1-\beta^2)^3 \equiv \gamma^3$  im Nenner  
wächst jedoch insgesamt die abgestrahlte Leistung  
 mit wachsender Geschwindigkeit  $\beta = v/c$ .

(Die SRT zeigt, dass für geladene Teilchen  
 mit endlicher Masse  $\beta = 1$  unmöglich ist).

### 8. Hertzsches Dipol

#### 8.1 Zeitabhängige Potentiale des Dipols

Wir behandeln jetzt die Abstrahlung schwingender Ladungen. Von besonderem Interesse ist die elektrische Dipolabstrahlung ("Hertzsches Dipol"), in manchen Fällen auch die magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolabstrahlung.



Als zeitabhängigen Dipol betrachten wir ein System aus zwei Ladungen  $\pm q$  im Abstand  $\vec{y}(t)$ , das von  $\vec{r}$  aus beobachtet wird.

Das Dipolmoment ist dann

$$\vec{p}(t) = -\frac{q\vec{y}}{2} - \frac{q\vec{y}}{2} = -q\vec{y}(t)$$

Die Geschwindigkeit der positiven Ladung ist  $-\dot{\vec{y}}/2$ , die der negativen  $\dot{\vec{y}}/2$ .

Für den Dipol soll das Liénard-Wiechert Potential berechnet werden, ( $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ )

$$(A^\mu)(\vec{r}, t) = \left( \begin{array}{c} \phi(\vec{r}, t) \\ \vec{A}(\vec{r}, t) \end{array} \right) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \cdot \frac{1}{1 - \vec{n}(t_r) \cdot \vec{\beta}(t_r)} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \vec{\beta}(t_r) \end{array} \right)$$

mit  $t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|}{c}$  retardierte Zeit

Die Ausdehnung des Dipols sei klein gegenüber dem Abstand zum "Beobachter" ( $\equiv$  Punkt, an dem das Feld gemessen wird)

$$|\vec{y}| \ll r = |\vec{r}|$$

so dass

$$1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} \vec{\beta}(t_r) \equiv 1 - \vec{u}(t_r) \vec{\beta}(t_r) \simeq$$

$$\simeq 1 - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{1}{c} \left( \pm \frac{\dot{y}}{2} (t_r) \right) \begin{cases} + \frac{\dot{y}}{2} & \text{für } -q \\ - \frac{\dot{y}}{2} & \text{für } +q \end{cases}$$

sowie

$$t_r \simeq t - \frac{r}{c}$$

Das Potential wird in der Fernzone  $r \gg y$

$$\phi = \frac{qc}{cr + \vec{r} \cdot \dot{y} / 2} - \frac{qc}{cr - \vec{r} \cdot \dot{y} / 2}$$

$$\vec{A} = - \frac{q \dot{y} / 2}{cr + \vec{r} \cdot \dot{y} / 2} - \frac{q \dot{y} / 2}{cr - \vec{r} \cdot \dot{y} / 2}$$

Mit dem Dipolmoment  $\vec{p} = -q \vec{y}$  wird das Vektorpotential für "langsame" Oszillationen

des Dipols  $|\dot{y}| \ll c$ :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = - \frac{q \cdot \dot{y}}{cr} = \frac{\vec{p}(t_r)}{cr}, \quad t_r = t - \frac{r}{c}$$

Das skalare Potential erhalten wir in der Näherung langsamer Oszillationen auf der (bei Ableitung des L-W Potentials implizit vorausgesetzten) Lorenz-Eichbedingung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\dot{\vec{p}}(t_r)}{cr} \right)$$

als

$$\phi(\vec{r}_i, t) = -\vec{\nabla} \cdot \int dt \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

(bei direkter Berechnung aus dem genähten Ausdruck würde  $\phi \rightarrow \frac{q}{r} - \frac{q}{r} = 0$  sein.)

mit Anwendung der Produktregel

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \right) = \frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}} - \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{p}}, \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}} \equiv \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$$

$$= \frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial t_r} \frac{\partial}{\partial t_r} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) =$$

$$= -\frac{\vec{r}}{rc} \cdot \frac{\partial}{\partial t_r} \ddot{\vec{p}}(t_r) = -\frac{\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}}{rc}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}_i, t) = \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$

Der erste Term folgt aus der Retardierung des Potentials. Relativ nahe am Dipol (jedoch  $r \gg y$ ) überwiegt dennoch das statische Potential

$$\phi_{\text{nah}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \equiv \phi_{\text{stat}}(\vec{r})$$

Weiter entfernt überwiegt der retardierte Term, der durch die Schwingungen des Dipols erzeugt wird:

$$\phi_{\text{fern}}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^2 c}$$

## 8.2 Zeitabhängige Felder

Die durch den schwingenden Dipol erzeugten Felder folgen direkt aus den Ausdrücken für die zeitabhängigen Potentiale,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{cr} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{cr} \right) \times \dot{\vec{p}} + \frac{1}{cr} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}} \\ &= \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{cr} \right) \times \dot{\vec{p}} = \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc} - \vec{\nabla} \left( \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^2 c} + \frac{\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) \\ &= -\frac{\ddot{\vec{p}}}{rc^2} + \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3 c^2} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^4 c} - \frac{\dot{\vec{p}}}{r^2 c} + \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\dot{\vec{p}}}{r^3} \end{aligned}$$

Relativ nahe am Dipol überwiegen die am stärksten mit  $r$  abfallenden Terme,

$$\vec{B}_{\text{nah}} \approx \frac{\dot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^3 c}, \quad \vec{E}_{\text{nah}} \approx \frac{3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\dot{\vec{p}}}{r^3}$$

In der Fernzone überwiegen die Felder

$$\vec{B}_{fern} \approx \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}}{r^2 c^2}, \quad \vec{E}_{fern} \approx \frac{(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^3 c^2} - \frac{\ddot{\vec{p}}}{r c^2} = \frac{1}{r^3 c^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}$$

Die Beträge von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in der Fernzone sind gleich,

$$|\vec{E}_{fern}| = |\vec{B}_{fern}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}| \sin \chi(\vec{p}, \vec{r})}{c^2 r}$$

Es ist  $\vec{E}_{fern} \perp \vec{B}_{fern} \perp \vec{e}_r = \vec{r}/r$ .

Poynting-Vektor:

Die Energieflussdichte des Dipols  $\vec{p}$ ,

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$$

wird in der Fernzone

$$\vec{S}_{fern} = \frac{c}{4\pi} (\vec{B}_{fern} \times \vec{e}_r) \times \vec{B}_{fern} = \frac{c}{4\pi} (\vec{B}_{fern}^2 \vec{e}_r - (\vec{B}_{fern} \cdot \vec{e}_r) \vec{B}_{fern})$$

wegen  $\vec{B}_{fern} \perp \vec{e}_r \Rightarrow$

$$\vec{S}_{fern} = \frac{c}{4\pi} \vec{B}_{fern}^2 \vec{e}_r = \frac{c}{4\pi} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r})^2}{c^4 r^4} \vec{e}_r = \frac{\ddot{\vec{p}}^2 \sin^2 \chi(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi c^3 r^2} \vec{e}_r$$

$\Rightarrow$  der Poynting-Vektor zeigt in Richtung  $\vec{e}_r$ ;

der Betrag ist

$$|\vec{S}_{fern}| = \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2 \sin^2 \chi(\vec{p}, \vec{r})}{4\pi r^2 c^3}$$

was auch direkt aus  $|\vec{S}_{fern}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{fern}| |\vec{B}_{fern}| \sin \chi(\vec{E}_{fern}, \vec{B}_{fern}) = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{fern}|^2$  folgt,

⇒ Der Energiefluss ist  $\propto 1/r^2$ ,  $\propto |\ddot{\vec{p}}|^2$

Für  $\angle(\vec{p}, \vec{r}) = 90^\circ$  (Ortsvektor der Messung senkrecht zum Dipol) ist die Abstrahlung wg  $\sin^2 \angle(\vec{p}, \vec{r})$  maximal, in Richtung der Dipolachse verschwindet sie.

Abgestrahlte Energie des Dipols

in der Fernzone durch Integration der Poynting-Vektors über  $t$  und die Fläche (in der Nahzone kompliziert)

$$W = \int_0^T dt \oint_A d\vec{A} \vec{S}_{\text{Poynt}} = \int_0^T dt \oint_A r^2 \sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi r^2 c^3} =$$

$$= \frac{1}{2c^3} \int_0^T dt |\ddot{\vec{p}}|^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta}_{= 4/3 \text{ (s.o., Kap. 7.4)}} = \frac{2}{3c^3} \int_0^T |\ddot{\vec{p}}|^2 dt$$

Bei gegebener zeitlicher Änderung des Dipols lässt sich das Zeitintegral auswerten. Beispielsweise bei harmonischer Oszillation:

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \sin(\omega t) = \vec{p}_0 \sin \omega(t - r/c) :$$

$$\ddot{\vec{p}} = -\vec{p}_0 \omega^2 \sin \omega(t - r/c)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^4 \int_0^T \sin^2 \omega t dt}$$

$$= \frac{2}{3c^3} p_0^2 \omega^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi p_0^2 \omega^3}{3c^3}$$

abgestrahlte Energie für eine Schwingungsperiode.

Die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung des Dipols wird

$$\overline{P} \equiv \frac{dW}{dt} = \frac{2\omega^4 p_0^2}{3c^3} \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4 c p_0^2}{3\lambda^4}$$

mit  $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$

$c = v\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda$  ,  $p_0 \equiv q \cdot y$  ;  $y \equiv \overset{\cdot}{l}$  = Länge des Dipols.

Da die im zeitlichen Mittel abgestrahlte Leistung umgekehrt proportional zu vierten Potenz der Wellenlänge ist,

$\overline{P} \propto 1/\lambda^4$ , werden kleine Wellenlängen ( $\lambda_{\text{blau}} \approx \frac{1}{2} \lambda_{\text{rot}}$ ) bevorzugt abgestrahlt.

In analoger Weise wird blaues Sonnenlicht an den Molekülen der Erdatmosphäre (da es in Schwingungen versetzt) etwa 16x stärker als rotes Licht gestreut: dem verdankt der Himmel seine blaue Färbung.



Die Ausdrücke für  $\vec{E}_{\text{fern}}$ ,  $\vec{B}_{\text{fern}}$  und  $\vec{S}_{\text{fern}}$  gelten nicht nur für den schwingenden Hertzischen Dipol, sondern auch für das Fernfeld einer beliebigen schwingenden Ladungsverteilung (im Grenzfall  $v \ll c$ ) im Volumen  $V$ , mit dem Potential

$$A^{\mu}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j^{\mu}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$A^{\mu}_{\text{fern}}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int_V j^{\mu}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) d^3r' \quad \text{für } r \gg r'$$

Wenn wir die Änderung der Ladung  $q$  im Volumen  $V$  schreiben als

$$\dot{q} \equiv \int_V \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) d^3r' \equiv c \cdot v \cdot \vec{A},$$

so gelten die oben abgeleiteten Ausdrücke für  $\vec{E}_{\text{fern}}$ ,  $\vec{B}_{\text{fern}}$  und  $\vec{S}_{\text{fern}}$  mit der Ersetzung des Dipolmomentes  $\vec{p}$  durch  $\vec{q}$ .

Auch ohne die bisherige Einschränkung  $v \ll c$  - dh. im voll relativistischen Fall - läßt sich die Abstrahlung des Dipols exakt berechnen (siehe Literatur). Für die abgestrahlte Gesamtleistung gilt die - für den Dipol modifizierte - relativistische Larmor-Formel, siehe Kap. 7.4  $\square$ .