

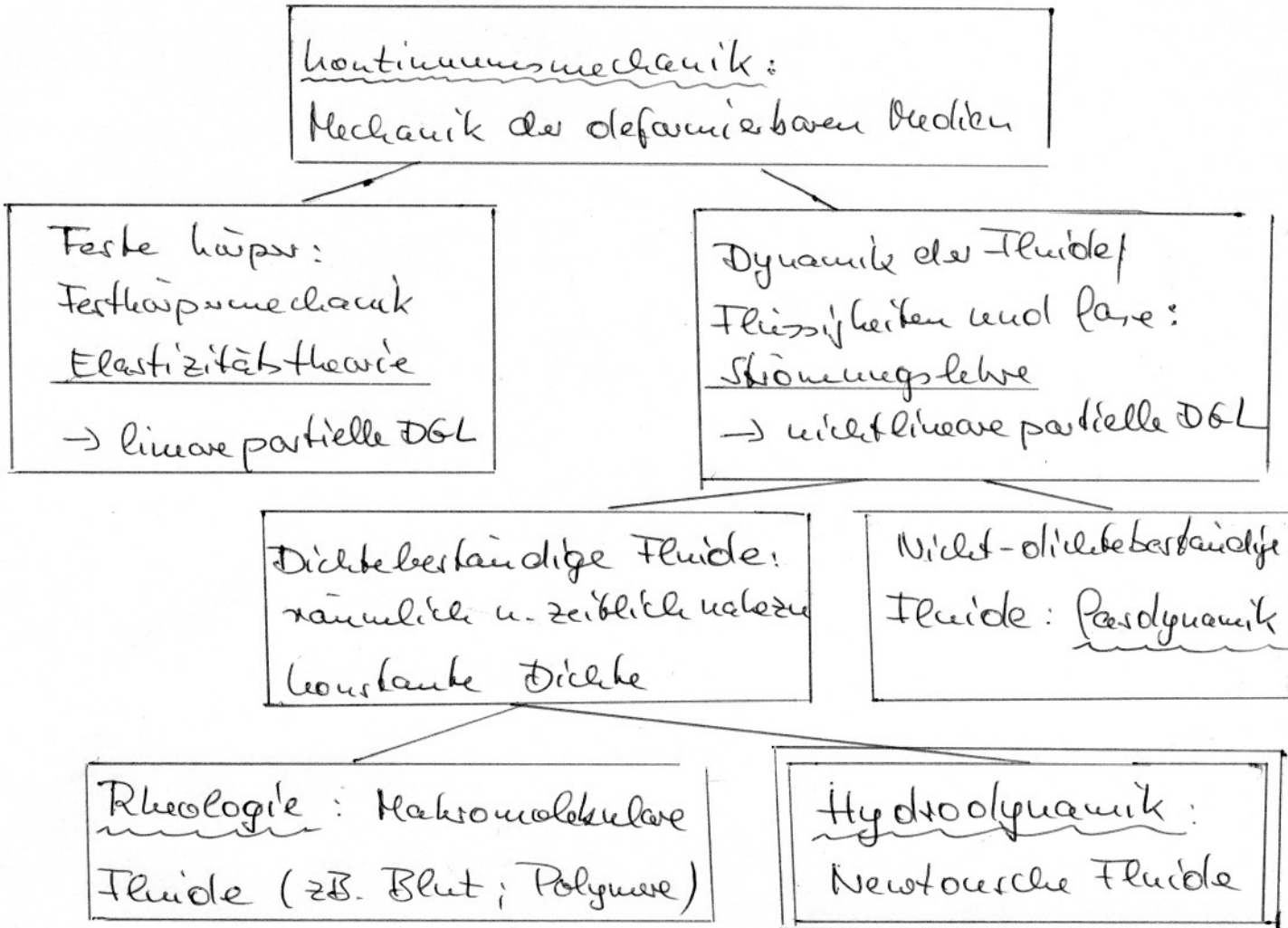
Hydrodynamik

WS 2009/10 Univ. HD

Georg Wolschke, ITP

1. Einleitung

Die Hydrodynamik ist ein Gebiet der Kontinuumsmechanik: der Mechanik der deformierbaren Medien.



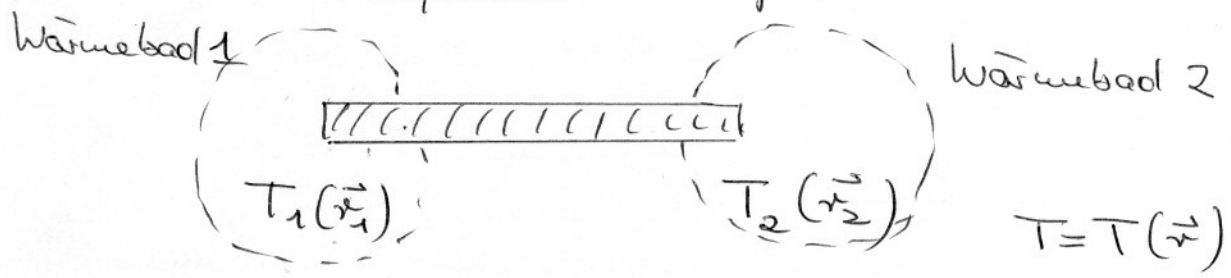
⇒ Die Strömungslehre (Dynamik der Fluide) umfasst mehrere Gebiete der Physik;

- 1) Hydrodynamik für einfache ("Newtonsche") Fluide wie Wasser
- 2) Rheologie: makromolekulare Fluide wie polymere Flüssigkeiten, Blut usw., die sich wegen der komplizierten Struktur der Moleküle anders als einfache Fluide verhalten.
- 3) Gasdynamik: Nicht-dichtebeständige Fluide / Gase.

Während sich die Thermodynamik v.a. mit Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht beschäftigt („Gleichgewichtsthermodynamik“), ist in der Strömungslehre der räumliche und zeitliche Verlauf von Prozessen in Systemen von Interesse, die sich nicht im Gleichgewicht befinden.

⇒ die globalen Zustandsgrößen der Gleichgewichtsthermodynamik wie Druck p und Temperatur T sind nicht mehr ausreichend.

Beispiel: Stab an beiden Enden durch Eintauchen in Wärmebäder auf unterschiedliche Temperaturen bringen



Jetzt den Stab von den Wärmebädern isolieren
 ⇒ die Temperatur wird auch eine Funktion der Zeit,

$$T = T(\vec{r}, t).$$

Dabei sind kleine, aber makroskopische Teilsysteme zur Zeit t in einer Umgebung des Ortes \vec{r} im lokalen Gleichgewicht.

Wird der Stab (oder ein anderes abgeschlossenes
Reaktorsystem) sich selbst überlasten, geht er
schließlich in ein globales Gleichgewicht über.

Bei er dazu kommt, gelten zwischen den
Zustandsfeldern die gleichen Zusammenhänge wie
in der Gleichgewichts-Thermodynamik.

z.B. gilt für ein ideales Gas im lokalen Gleichgewicht
die Zustandsgleichung

$$\boxed{p(\vec{r}, t) V(\vec{r}, t) = kT(\vec{r}, t)}$$

mit dem lokalen Druck $p(\vec{r}, t)$ und dem spez.
Volumen $V(\vec{r}, t)$.

Gibt es Bewegungen im Inneren des Systems,
ist zur Zustandsbeschreibung auch ein
Geschwindigkeitsfeld erforderlich

$$\boxed{\vec{v}(\vec{r}, t)} \quad \text{bzw. ein Stromdichtefeld } \left| \vec{j}(\vec{r}, t) \right| \\ = g(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Die Beschreibung eines räumlich und zeitlich
veränderlichen Systems auf der Basis der
Annahme des lokalen Gleichgewichts nennt man
die "hydrodynamische Beschreibung".

Auf der Basis dieser Beschreibung soll in der VL die Hydrodynamik im engeren Sinne (für Newtonsche Fluide) dargestellt werden.

Die Substanzen werden dabei - anders als in der kinetischen Theorie und der molekularen Hydrodynamik - als Kontinuum angesehen, d.h. ihre detaillierteste molekulare Struktur (→ Rheologie) wird nicht berücksichtigt.

⇒ Ein infinitesimales Volumenelement in der Hydrodynamik ist klein gegenüber dem Volumen des betrachteten Körpers, aber groß im Vergleich zu den zwischenmolekularen Volumina.
(⇒ jedes Volumenelement ΔV enthält genügend viele Moleküle für eine Kontinuumsbeschreibung)

Der Zustand einer bewegten Flüssigkeit wird dann durch 5 Größen vollständig festgelegt:

- Geschwindigkeitsverteilung $\vec{u}(\vec{r}, t)$ - 3 Komponenten
- Zwei beliebige thermodynamische Größen, die über die Zustandsgleichung der Substanz alle anderen thermod. Größen festlegen. Wähle hier
 - Druck $p(\vec{r}, t)$
 - Dichte $\rho(\vec{r}, t)$

⇒ Das vollständige Gleichungssystem der Hydrodynamik muss elementar 5 Gleichungen enthalten.

Für eine ideale Flüssigkeit (keine Viskosität, keine Wärmeleitfähigkeit) sind dies

- Die Eulerschen Gleichungen (3komp.)
- Die Kontinuitätsgleichung
- Die Adiabategleichung ($S = \text{const}$: kein Wärmeaustausch mit der Umgebung).

Während in der Elastizitätstheorie für Festkörper die Probleme oft mit linearen partiellen DGLs formulierbar und exakt lösbar sind, ist das in der Hydrodynamik nicht der Fall: die Gleichungen sind nichtlinear und nur selten exakt lösbar. Die Entwicklung der Hydrodynamik erfolgte auch deshalb in engem Kontakt zum Experiment.

2. Ideale Fluide

haben keine Viskosität
und keine Wärmeleitfähigkeit. Herleitung
der Euler-Gleichungen:

2.1 Kontinuitätsgleichung

sie drückt die Erhaltung der Masse in
der Hydrodynamik aus und gilt auch
für viskose Fluide.

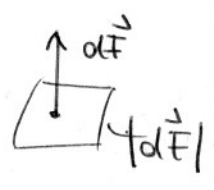
Dichte ρ , Volumen V_0 , Masse $\int_{V_0} \rho dV$

Fluss durch die Oberfläche von V_0 : $\oint \rho \vec{v} d\vec{F}$

$|\vec{dF}|$ = Größe des Flächenelements

$d\vec{F}$ in Richtung der äußeren Normalen

$\Rightarrow \oint \rho \vec{v} d\vec{F} > 0$ für Fluss aus V_0 heraus
 < 0 " " " in V_0 hinein



$\Rightarrow \oint \rho \vec{v} d\vec{F}$ fließt pro Zeiteinheit aus V_0 heraus
(Integral über die geschlossene Oberfläche von V_0)

Die gleichzeitige Abnahme der Flüssigkeitsmenge
in V_0 ist

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV \Rightarrow \text{gleichsetzen ergibt}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \oint \rho \vec{v} d\vec{F}$$

* Oberflächenintegral mit dem
Gauß'schen Satz in Volumenintegral
umformen: $\int \nabla \cdot \vec{a} dV = \oint \vec{a} d\vec{F}$

mit dem Nabla-Operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

ist $\vec{\nabla} \vec{a} \equiv \text{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$

$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV = \int \vec{\nabla} (\rho \cdot \vec{v}) \, dV$

$\Rightarrow \int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \cdot \vec{v}) \right] dV = 0 \quad \forall V_0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \cdot \vec{v}) = 0}$ Kontinuitätsgleichung

mit $\vec{\nabla} (\rho \vec{v}) = \rho \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla} \rho \equiv \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \text{grad} \rho$
lässt sich die KG auch schreiben als

$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla} \rho = 0}$

oder mit dem Stromdichtevektor

$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ als

$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{j} = 0}$

KG ; Richtung von \vec{j} = Richtung von \vec{v} ;

$|\vec{j}|$ = Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit \perp Flächeneinheit fließt.

2.2 Eulersche Gleichung

Auf die geschlossene Oberfläche eines Flüssigkeitsvolumens V_0 wirkt die Kraft

$$\vec{F} = - \oint p d\vec{F} \Rightarrow \text{Umwandlung in ein Volumenintegral mit dem Gaußschen Satz}$$

$$= - \int_{V_0} \vec{\nabla} p dV = - \int_{V_0} \rho \text{grad} p dV$$

d.h. auf jedes Volumenelement dV wirkt die Kraft $-\vec{\nabla} p dV$.

Bewegungsgleichung für ein Volumenelement:

Kraft pro Volumeneinheit = Dichte \times Beschleunigung

$$\boxed{-\vec{\nabla} p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Dabei ist $\frac{d\vec{v}}{dt}$ nicht allein die (lokale) Geschwindigkeitsänderung des Fluids in einem festen Raumpunkt, sondern eines sich im Raum bewegenden Fluidteilchens im Zeitintervall dt .

$\Rightarrow d\vec{v}$ hat 2 Anteile:

(1) Änderung im Raumpunkt \vec{r} während dt

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt \quad \text{„lokale Ableitung“}$$

$t \quad r \quad t+dt$
 $\circ \xrightarrow{dr} \circ$
 $| -dt - |$

bei konstantem $\vec{r} = (x, y, z)$

(2) Differenz der Geschwindigkeiten zum gleichen Zeitpunkt in zwei Raumpunkten mit Abstand dr (\equiv dem in dt zurückgelegten Weg):

$$\Rightarrow dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

"konvektive Ableitung"

\Rightarrow (1) + (2) ergibt die infinitesimale Geschwindigkeitsänderung

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad | : dt$$

\Rightarrow "substanziale Ableitung" (Substanz = bewegtes Fluid)

$$\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p$ ergibt

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}}$$

Eulersche Gleichung für ideale Fluide.

\uparrow
Konvektionsglied

Leonhard Euler, 1755
[*1707 Basel - 1783 St. Petersburg]

Die Nichtlinearität im Konvektionsglied erschwert die Integration erheblich: das Superpositionsprinzip (für lineare DGL) gilt hier nicht.

Die Nichtlinearität ist wesentlich verantwortlich für die Vielzahl hydrodynamischer Phänomene, und - unter bestimmten Bedingungen - für den Übergang zu chaotischem (turbulentem) Verhalten.

Im Schwerefeld wirkt auf jede Volumeneinheit zusätzlich die Kraft $\rho \cdot \vec{g}$, so dass

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

Euler-Gleichung im Schwerfeld

Die Gleichung gilt für ideale Fluide, bei denen Wärmeleitung und Zähigkeit vernachlässigbar sind. Beide Prozesse erzeugen Energieabstrahlung. Ohne sie ist die Bewegung in jedem Teil der Flüssigkeit adiabatisch: Die Entropie jedes Flüssigkeitselement bleibt bei der Bewegung im Raum konstant.

mit $s = \frac{\text{Entropie}}{\text{Masseneinheit}} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = 0$

analog zu $\frac{d\vec{v}}{dt}$ gilt hier für die totale Zeitableitung (= Entropieänderung eines sich bewegendes Fluidelement)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0$$

Adiabaticgleichung

lokale konvektive Ableitung

Mit der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{v}) = 0$ lässt sie sich als "Kontinuitätsgleichung für die Entropie" schreiben,

$$\frac{\partial (\rho \cdot s)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot s \cdot \vec{v}) = 0$$

mit der Entropiestromdichte $\rho \cdot s \cdot \vec{v}$.

Beweis durch ausdifferenzieren und Einsetzen der KG:

$$\rho \cdot \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \cdot \vec{v}) \cdot (\vec{\nabla} s) + s \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) \stackrel{!}{=} 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{5em}}_{=0}$

Oft vereinfacht sich die Adiabaten-Gleichung:
 Ist die Entropie anfangs in allen Punkten des Flüssigkeitsvolumens gleich, so bleibt sie auch während der weiteren Bewegung der Flüssigkeit zeitlich unverändert:

$$s(\vec{r})|_{t=0} = \text{const} \Rightarrow s(\vec{r}, t) = \text{const.}$$

"isentrop" (oder homentrop) Bewegung.

Für diesen Fall lässt sich mit der Enthalpie w (pro Masseneinheit) die Euler-Gleichung vereinfachen

$$dw = \underbrace{T ds}_{\text{innere Energie}} + \underbrace{V dp}_{\text{Verdrängungsarbeit}}, \quad V = \frac{1}{\rho} \text{ spezifisches Volumen}$$

$T = \text{Temperatur}$

mit $s = \text{const} \Rightarrow ds = 0$

$$\Rightarrow dw = V dp = \frac{dp}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} w = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p} \quad \text{und die Euler-fl.} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p$$

wird

(Die Enthalpie wird wichtig bei isobaren Prozessen).

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} w}$$

(bzw im Schwerfeld: $= -\vec{\nabla} w + \vec{g}$)

Durch Bilden der Rotation auf beiden Seiten, mit $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$, und

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\vec{\nabla}^2 v^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$
 aus der Vektoralgebra

lässt sich im isotropen Fall die Euler-Gleichung in eine Gleichung umschreiben, die nur das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$ enthält:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})]$$

Euler-Gleichung für isentrope Bewegung *

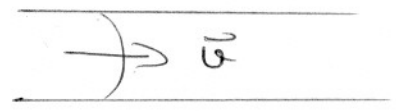
Dazu kommt bei inkompressiblen Fluiden die Bedingung (wg. $\rho = \text{const}$, $kG \Rightarrow$)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

der Unterschied kompressibel/inkompressibel fällt erst in der Nähe der Schallgeschwindigkeit ins Gewicht.

sowie die Randbedingungen

die Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit senkrecht zur



Wand verschwindet, $v_{\perp} = 0$

"das Fluid kann nicht in die Wand eindringen" bzw. bei zwei nicht mischenden Fluiden:

$$v_{\perp}^1 = v_{\perp}^2 = v_{\perp}^{\text{Grenzfläche}(1-2)}$$

* für $\rho \neq \text{const}$ ist das i.a. nicht möglich, da $\vec{\nabla} \times (\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}) \neq 0$.

In der Euler-Gleichung (*) für die ideale Bewegung fällt der Gravitationskern weg, da

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -\vec{\nabla}U, \text{ und } \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}U = 0 :$$

In der nur durch das Geschwindigkeitsfeld bestimmten Form der Euler-Gleichung gibt es keine Abhängigkeit von konservativen (= als Gradienten eines Potentials darstellbaren) äußeren Kräften.

Der Einfluss der äußeren Kraft kann sich jedoch in den Randbedingungen beim Lösen der DGL bemerkbar machen.

2.3 Bernoullische Gleichung

Bei einer stationären Strömung ist die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Raumpunkt, den das Fluid einnimmt, zeitlich konstant:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$$

Die Eulersche Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} \left(w + \frac{u^2}{2} \right), \quad \begin{aligned} w &= u + pV \\ &= T \cdot S + \frac{P}{\rho} \end{aligned}$$

wird dann

$$\vec{\nabla} \frac{u^2}{2} - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} w$$

Daraus lässt sich die Bernoullische Gleichung

ableiten:

$$\frac{v^2}{2} + w = \text{const.}$$

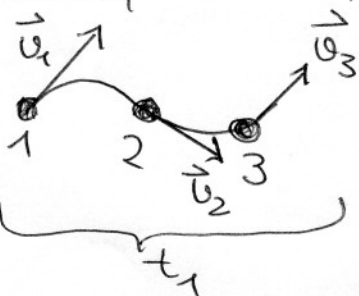
Daniel Bernoulli, 1738
("Hydrodynamica", Scharburg)

Der Wert der Konstanten ist i. a. verschieden für verschiedene Stromlinien.

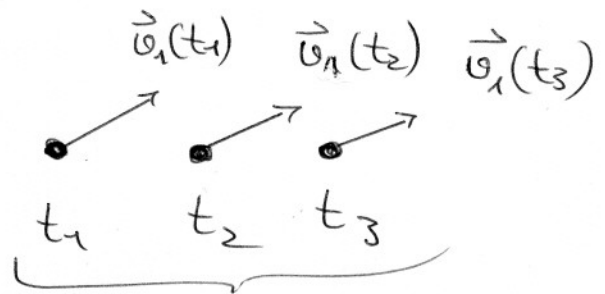
Sie stimmen bei stationären Strömungen mit den Behauptungen der Flüssigkeitsteilchen überein - bei einer nichtstationären Strömung ist das nicht der Fall:

Die Tangenten an die Stromlinien geben die Richtung des Geschwindigkeitsvektors zu gegebenem Zeitpunkt (für verschiedene Fluidteilchen in aufeinanderfolgenden

Raumpunkten).



Stromlinie



Bahnkurve

Die Tangenten an die Bahnkurven geben die Richtungen von \vec{v} bestimmter Fluidteilchen in aufeinanderfolgenden Zeitpunkten an.

Im Schwerfeld muss in der Euler-Gleichung und elementar in der Bernoulli-Gleichung \vec{g} ergänzt werden (in z-Richtung):

$$\frac{v^2}{2} + w + g \cdot z = \text{const}$$

D. Bernoulli fand die Gleichung jedoch nicht durch Ableitung aus der (damals noch unbekannt) Euler-Gleichung, sondern direkt aus dem Energiesatz als

$$\rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z = \text{const}$$

kinetische Energie pro Volumen-einheit

Druck: pot. Energie der inneren Kräfte

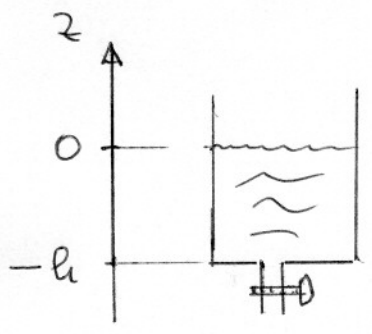
pot. Energie der äußeren Kraft pro Volumeneinheit

Die Bernoullische Gleichung hat wichtige Anwendungen im Turbinenbau, der Aerodynamik usw.

Obwohl ihre Ableitung aus der Eulerschen Gleichung (s. Literatur) zunächst für stationäre Strömungen gilt, lässt sich die BG auch auf nichtstationäre Strömungen verallgemeinern.

Bsp: Aus der Bernoullischen Gleichung folgt das

Toricellische Theorem, das Toricelli - ein Schüler Galileis -
~ 100 Jahre vor Bernoulli fand (Evangelista Toricelli; 1608-47)



Behälter mit Hahn

Hahn geschlossen $\Rightarrow v = 0$ im ganzen Behälter
 $p = 0$ (Überdruck über Atmosphärendruck) an der Oberfläche, $z = 0$

Bernoullische Gl. \Rightarrow für $z = 0$: const = 0

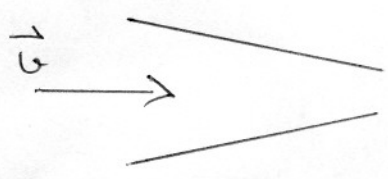
\Rightarrow am Boden: $p = \rho \cdot g \cdot h$, hydrostat. Druck

Hahn öffnen \Rightarrow

an der Öffnung $p = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = gh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$

⊗ einfache Anwendung des Energiesatzes wie Bernoulli

② Stationäre Strömung durch eine horizontale Röhre von veränderlichem Querschnitt.



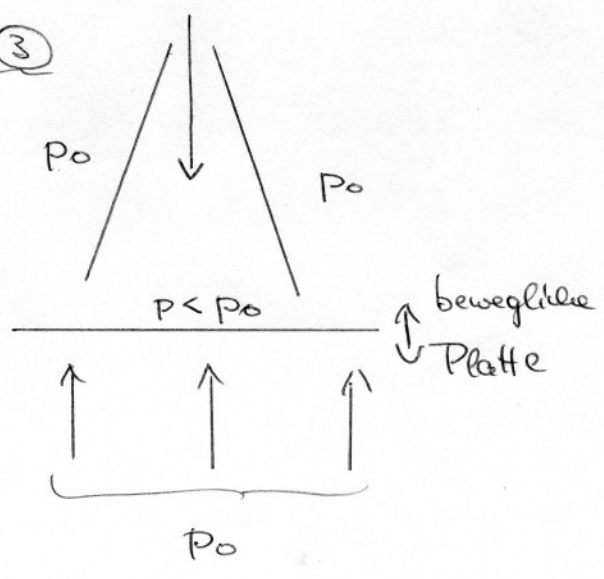
Bei Inkompressibilität ist die Durchflussmenge in jedem Querschnitt dieselbe

$\Rightarrow v$ nimmt bei abnehmendem Querschnitt zu, bei zunehmendem ab; nach Bernoulli

$\left[\rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const} \right]$ verhält sich der Druck umgekehrt.

(Eine Menschenmenge in einer sich verengenden Passage verhält sich gegensätzlich: die Geschwindigkeit nimmt ab, der Druck zu).

Bsp. ③



Pressluft strömt durch einen Kanal mit zunehmendem Querschnitt gegen eine beweglich gelagerte Platte
 => die Platte wird angehoben.

Grund: Im Kanal nimmt die Geschwindigkeit der Luft ab, der Druck wg. Bernoulli-/Energiesatz zu. Am Kanalende herrscht Atmosphärendruck p_0 , kurz davor (im Kanal) also $p < p_0 \Rightarrow$ es entsteht eine Saugwirkung von oben, die Platte wird angehoben.

2.4 Euler-Gleichung im linearisierten Fall

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g} \quad \text{EG}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{KG}$$

für ideale kompressible Fluide ist $\nabla \cdot \vec{u} \neq 0$

Linearisierung: z.B. bei kleinen harmonischen Luftschwingungen in der Akustik

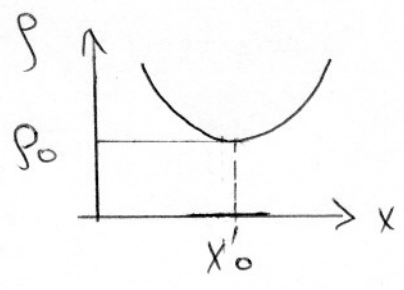
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \approx \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

\Rightarrow # quadratischen Glieder

Beispiel Akustik:

p gemessen als Abweichung vom Atmosphärendruck p_0

ρ durch Normalwert ρ_0 der Dichte der ungestörten Atmosphäre ersetzen.



$$p = p_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x_0}}_{=0} + \frac{\xi^2}{2} \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{x_0} + \dots$$

(kleine Größen 2. Ordnung vernachlässigen)

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

Euler gl.,
 linearisiert } 4 lineare Gleichungen
 Kont. gl.

dh. die Beschreibung wird auf zeitliche Änderungen der Dichte an einem festen Ort x_0 konzentriert.

Zusammenhang von Druck p und Dichte ρ aus der Thermodynamik ableiten:

Bei isothermen Zustandsänderungen ist

$$\vec{\nabla} p = c^2 \vec{\nabla} \rho \Rightarrow \text{hier } \boxed{c = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}} \text{ Schallgeschwindigkeit}$$

Auf Meereshöhe ist $\rho_0 = 1.2928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ($= \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$)

$$p_0 = 101325 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Pa}$$

$$p_0 = 1013.25 \text{ hPa}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{101325}{1.2928}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{279.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Exp. Werte von c in Luft:

0	10	20	30	$T(^{\circ}\text{C})$
332	338	344	350	$c(\frac{\text{m}}{\text{s}})$

dh. der isotherme Wert von $280 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist wesentlich zu klein, da bei einem schnellen Wechsel der Luftschwingungen kein Wärmeausgleich möglich ist und deshalb eine Zustandsänderung bei der Schallausbreitung nicht isotherm ist, sondern adiabatisch:

$pV^{\kappa} = \text{const}$ adiab. Zustandsgleichung

der Adiabatenkoeffizient ist der Quotient der spezifischen Wärmekapazitäten,

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{f}$$

f = Anzahl der Freiheitsgrade,

$f = 5$ für zweiatomige Gase (3 Transl., 2 Rotation)

$$\Rightarrow \kappa = \frac{7}{5} = 1.4$$

$f = 3$ für einatomige Gase,

$$\kappa = \frac{5}{3}$$

und

$$\left(\frac{dp}{dg}\right) = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}$$

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{1.4 \cdot 279.96 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx \underline{331.25 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

in guter Übereinstimmung mit dem exp. Wert.

[Für polytrophe Prozesse gilt allgemein $pV^x = \text{const.}$,
 $x = 0$ isobar, $x = 1$ isotherm, $x = \kappa$ adiabatisch, $x \rightarrow \infty$ isochor].

Die linearisierten Gleichungen werden mit der Schallgeschwindigkeit c :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + c^2 \vec{\nabla} p = 0$$

daraus \vec{v} eliminieren:

KB partiell nach t differenzieren,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{ in Euleff.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p$$

Dieselbe Gleichung gilt für p , da $\vec{\nabla} p$ und Δp , $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ bis auf c^2 gleich den mit p gebildeten Größen sind

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p$$

≡ Schwingungsgleichung,

wie bei der schwingenden Saite

mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, oder der

schwingenden Membran mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Lösung: hier-analog zur Saite - nur eine horizontale betrachten:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Integration durch die sog. d'Alembertsche Lösung,

$$p(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct) \text{ mit willkürlichen reellen Funktionen } F_1, F_2$$

Mit der Anfangsbedingung für $t=0$

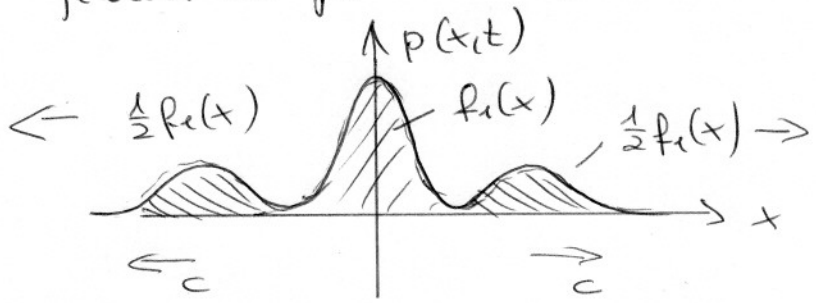
$$p = f_1(x), \quad \frac{\partial p}{\partial t} = f_2(x) \quad \text{wird}$$

$$F_1(x) + F_2(x) = f_1(x)$$

$$F_1'(x) - F_2'(x) = \frac{1}{c} f_2(x) \quad \text{Integration ergibt}$$

$$\Rightarrow F_{1,2}(x) = \frac{1}{2} \left[f_1(x) \pm \frac{1}{c} \int_{x_0}^x f_2(\xi) d\xi \right]$$

Für $f_2=0$ wandert eine anfängliche Druckschwung $f_1(x)$ zu Hälfte nach rechts, zu Hälfte nach links, jeweils mit Geschwindigkeit c , und ohne Formänderung.



Das entspricht der Ausbreitung eines Geräusches, mit Schallgeschwindigkeit c (analog zu Saiten, die bei $t=0$ angezupft, und dann sich selbst überlassen wird.)

Die Fortpflanzung ist longitudinal: Transversalwellen gibt es bei idealen Fluiden nicht.

Bei periodischen Luftschwingungen ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{die Frequenz (Schwingungszahl/s, Tonhöhe)}$$

$\Rightarrow F_1, F_2$ sind trigonometrische Funktionen mit Phasen α, β , Amplituden a, b :

$$F_1(x+ct) = b \cos(kx + \omega t + \beta) \quad \text{: in } -x \text{ Richtung}$$

$$F_2(x-ct) = a \cos(kx - \omega t + \alpha) \quad \text{: in } x \text{ "}$$

Bei $a=b$ ergibt die Überlagerung eine stehende Welle.

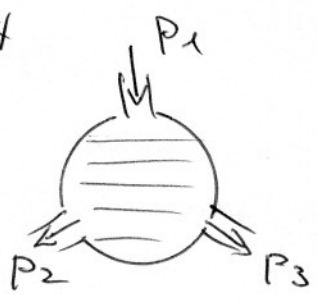
$$\text{Die Schallgeschwindigkeit ist } \boxed{c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}}$$

2.5 Hydrostatik

Für eine ruhende Flüssigkeit ohne äußere Kräfte wird die Euler-Gleichung wg. $\vec{v} \equiv 0$

$$\vec{\nabla} p = 0 \Rightarrow p = \text{const.}$$

Der Druck ist in allen Punkten der Flüssigkeit gleich (im Inneren und am Rand):

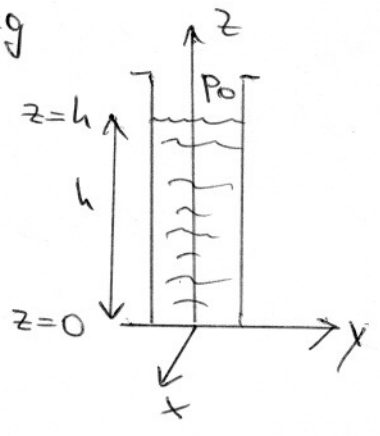


Pascalsches Gesetz (Blaise Pascal, 1623-62)

Im Schwerfeld wird die Euler-Gleichung

$$\vec{\nabla} p = \rho \cdot \vec{g}$$

Für inkompressible Fluide ($\rho = \text{const.}$) lässt sich die Gleichung integrieren:



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho \cdot g$$

$\Rightarrow p = -\rho \cdot g \cdot z = \text{const.}$, mit $\text{const.} = p_0$: Druck an der Oberfläche $z = h \Rightarrow p = p_0$

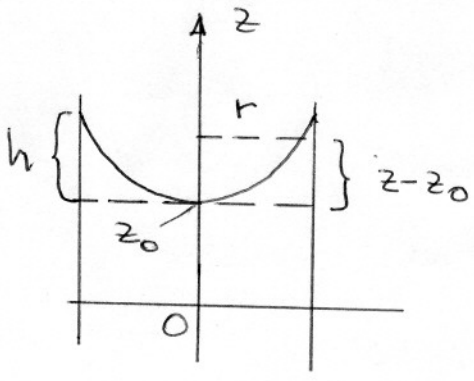
$$\Rightarrow \text{const.} = p_0 + \rho g h$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 + \rho g (h - z)}$$

Im allgemeinen- und bes. für Gase - ist ρ jedoch nicht konstant; für Fluide im thermischen Gleichgewicht lässt sich die Euler-Gleichung dennoch integrieren.

Bei Rotation des Zylinders: Flüssigkeitsgefüllte Zentrifuge
die mit $\omega = \text{const}$ um die Vertikale rotiert.

Die Zentrifugalkraft hat ein Potential und ermöglicht Fließgleichgewicht \Rightarrow quasi-statisches Problem



Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit

$$F_r = \rho \cdot r \cdot \omega^2$$

Zentrifugalpotential

$$U_r = -\frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

\Rightarrow Gesamtpotential von Gravitation und Rotation

$$U = \rho g z - \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 = \rho g \left(z - \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right)$$

Mechanische Fließgleichgewichtsbedingung:

$$\vec{\nabla} p = \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} (p + U) = 0$$

$$p = -U + \text{const} \quad \& \quad p + U = \text{const.}$$

$$p = \rho g \left(\frac{r^2 \omega^2}{2g} - z \right) + \text{const.}$$

Bestimmung der Konstanten:

$z_0 =$ Wasserstandshöhe bei $r = 0$, p der Überdruck über den äußeren Atmosphärendruck

$$\Rightarrow 0 = -\rho g z_0 + \text{const} \Rightarrow \text{const} = \rho g z_0$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \rho \cdot g \left(\frac{r^2 \omega^2}{2g} + z_0 - z \right)}$$

Daraus folgt die Gleichung der "freien Oberfläche" mit $p=0$:

$$z - z_0 = \frac{r^2 \omega^2}{2g}$$

und mit $h =$ Auftriebshöhe des Wassers am Rand: $r=R \Rightarrow h = z - z_0$

$v = \omega r$ Bahngeschwindigkeit

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{v^2}{2g}} \quad \text{Oberflächenparaboloid}$$

Die Niveauflächen konstanten Druckes sind kongruente Paraboloider, die gegen das Oberflächenparaboloid nach unten verschoben sind.

2.6 Energie- und Impulsstrom im Fluid

Die Energie des Fluids pro Volumenelement ist

$$\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon = \text{kinet. + innere Energie} \quad (\epsilon = \text{innere Energie pro Masseneinheit})$$

Bei Bewegung folgt die zeitliche Änderung aus der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right] = \dots \quad \text{Sie löst sich aus Kontinuitätsgleichung, Euler-Gleichung, und der thermodynamischen Relation} \\ d\epsilon = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \text{ berechnen; man erhält}$$

$$= \dots = - \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right], \quad w = \epsilon + pV = \epsilon + \frac{p}{\rho} \\ \text{Enthalpie pro Masseneinheit.}$$

Die Energieänderung des Fluids pro Zeiteinheit in einem gegebenen Volumen V ergibt sich durch Integration über dieses Volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right] dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \right] dV$$

mit Gauß'schem Satz $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \oint_{\mathbb{F}} \vec{a} d\vec{F}$

in Oberflächenintegral umformen:

$$= - \oint_{\mathbb{F}} \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) d\vec{F} =$$

$$= - \oint_{\mathbb{F}} \vec{j} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) d\vec{F}$$

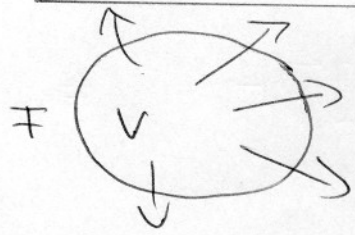
$\hat{=}$ Energiemenge, die pro Zeiteinheit aus dem betrachteten Volumen V durch dessen Begrenzungsfläche \mathbb{F} hinausfließt.

$\Rightarrow \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \vec{j} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) =$ Vektor der Energiestromdichte.

Das Fluid mit Stromdichte $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$ führt pro Masseneinheit bei der Bewegung die Energie

$\frac{v^2}{2} + w$ mit sich: hier steht die Enthalpie anstelle der inneren Energie: $w = \epsilon + \frac{p}{\rho}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\rho \frac{v^2}{2} + \rho \epsilon \right] dV = - \underbrace{\oint_{\mathbb{F}} \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \epsilon \right) d\vec{F}}_{\text{kinet. + innere Energie}} - \underbrace{\oint_{\mathbb{F}} \rho \vec{v} d\vec{F}}_{\text{Arbeit}}$$



kinet. + innere Energie, die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche transportiert wird

Arbeit, die von den Drückkräften an der Flüssigkeit innerhalb der geschlossenen Oberfläche geleistet wird

Impulsstrom

Der Impulsstrom folgt analog aus Kontinuitätsgleichung, Euler-Gleichung, und thermodyn. Relationen:

$$\rho \cdot \vec{v} = \text{Impuls pro Volumeneinheit}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) = \text{Geschwindigkeit der Impulsänderung}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} \, dV &= \dots = - \int_V \vec{\nabla} [p + \rho v^2] \, dV \\ &= - \oint_F [p + \rho v^2] \, d\vec{F} \end{aligned}$$

\Rightarrow $p + \rho v^2$ Dichte des Impulsstromes durch die Oberfläche.
 $[\rho v^2] = \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$

2.7 Zirkulation, Thomsonscher Satz

Die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve ist definiert als ($d\vec{\ell}$ = Linienelement auf der Kurve)

$$\Gamma = \oint \vec{v} \, d\vec{\ell}$$


Bei Bewegung des Fluids ändern sich \vec{v} und die Gestalt der Kurve; wie verhält sich die Zirkulation?

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{v} \, d\vec{\ell} \quad ? \quad \begin{matrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} & \text{---} \circlearrowleft \text{---} & \text{---} \circlearrowleft \text{---} \end{matrix}$$

totale Zeitableitung: Änderung der Zirkulation längs einer sich bewegenden Flüssigkeitskurve, nicht längs einer raumfesten.

δ : Differentiation nach den Ortskoordinaten
 d : " " " " der Zeit

$d\vec{r}$: Linienelement auf der Kurve; als Differenz

$\delta\vec{r}$ der Ortsvektoren \vec{r}_1, \vec{r}_2 schreiben: 

$$\Gamma = \oint \vec{v} \delta\vec{r}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \delta\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} + \oint \vec{v} \frac{d}{dt} \delta\vec{r}$$

es ist $\vec{v} \frac{d}{dt} \delta\vec{r} = \vec{v} \delta \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \delta \vec{v} = \delta \frac{v^2}{2}$

und $\oint \delta \frac{v^2}{2} = 0$ (das Integral über ein vollständiges Differential längs einer geschlossenen Kurve verschwindet)

$$\Rightarrow \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \delta\vec{r} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r}$$

Für irrotationale Bewegungen ist die Beschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla w$$

und mit der Stokeschen Formel lässt sich das Linienelement in ein Flächenintegral überführen,

$$\oint_K \vec{a} d\vec{r} = \int_F (\nabla \times \vec{a}) d\vec{F} \Rightarrow$$

$$\oint_K \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{r} = \int_F \nabla \times \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) d\vec{F} = 0$$

wg. $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla w$, und $\nabla \times \nabla = 0$; ✓

gilt wg. $\nabla \times \vec{g} = 0$ auch im Schwerfeld.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{const}}$$

Thomson's Satz (W. Thomson, 1869)

"Erhaltungssatz für die Zirkulation"

In einer idealen Flüssigkeit ist die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve bei beschleunigter Strömung konstant.

Auf eine unendlich kleine geschlossene Kurve ∂K anwenden, Integral mit der Stokes'schen Formel umformen:

$$\oint_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{\partial K} \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{F} \approx \delta F \vec{\nabla} \times \vec{v} = \text{const.}$$

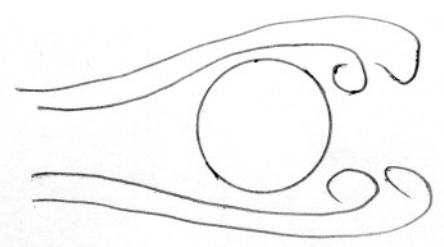
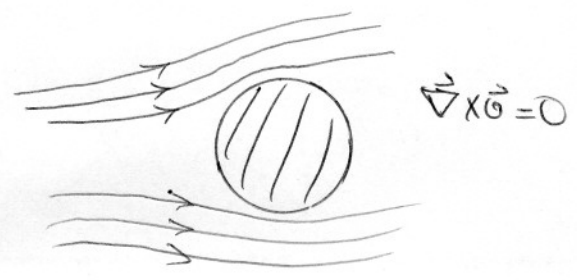
$\vec{\nabla} \times \vec{v}$ = Wirbelung der Fluidströmung
bleibt konstant bei der Bewegung des Fluids.

2.8 Potentialströmungen

sind Strömungen, für die im ganzen Raum gilt

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0}$$

dh. wirbelfreie Strömung, bis auf evtl. singuläre Punkte oder Linien.



Bei Wirbelströmungen ist $\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0}$

Aus der Erhaltung der Zirkulation folgt

- zunächst für stationäre Strömungen -

Sei $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ auf einem Punkt der Stromlinie; eine infinitesimale geschlossene Kurve σ_k umschleife die Stromlinie, und bewege sich mit dem Fluid

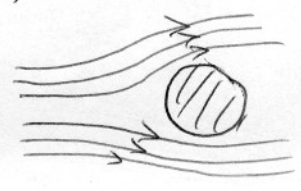


$$\Rightarrow \oint_{\sigma_k} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \text{const} = \int_{\mathbb{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{F} \quad (\text{Stokes})$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ längs der gesamten Stromlinie, die Rotation verschwindet auch in allen anderen Punkten der Stromlinie.

Bei nicht stationären Strömungen gilt das auch, nur betrachtet man hier anstelle der Stromlinie die in der Zeit von einem bestimmten Fluidteilchen zurückgelegte Bahnkurve (die nur bei stat. Strömungen mit der Stromlinie übereinstimmt).

Ist der von $-\infty$ auf einen Körper einströmende Strom "konvergenz"

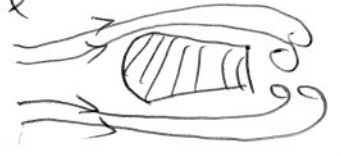


($\vec{v} = \text{const.}$), so ist die stationäre Strömung um einen beliebigen Körper eine Potentialströmung mit $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$.

Democh unterscheidet sich das wabe Strömungsbild
bei den Umströmungen eines Körpers von einer Potentialströmung,
denn die Strömung läuft der Wand an und bildet keine
geschlossenen Linien um Stromlinien

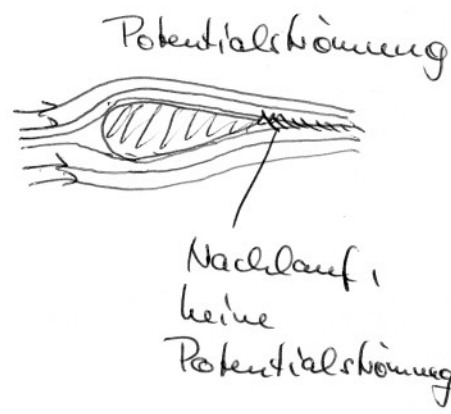
⇒ die Stromlinien "lösen sich ab" und verlaufen im
Inneren der Flüssigkeit: Es gibt einen Sprung in der
tangentialen Geschwindigkeitskomponente

⇒ für ideale Fluide gibt es eine unendliche
Mannigfaltigkeit von Lösungen mit Flächen
tangentialer Wirbelströmungen. Da sie instabil
sind, wird die Strömung turbulent.



Bei realen (viskosen) Fluiden ist die Lösung
jedoch als Folge der Zähigkeit i.a. eindeutig;
entscheidend ist dabei das Verhalten in der
Grenzschicht.

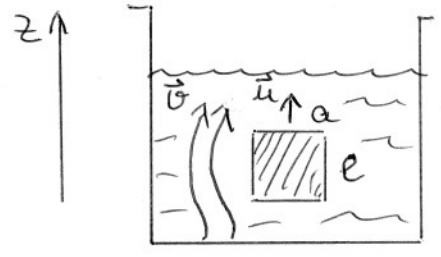
Bei stromlinienförmigen Körpern
ist die Strömung nur in einer dünnen
Flüssigkeitsschicht in der Nähe der
Oberfläche des Körpers, und im
schmalen Bereich des Nachlaufs
keine Potentialströmung.



kleine Schwingungen eines eingetauchten Körpers

als Beispiel für eine Potentialströmung.

Für kleine Amplituden $a \ll l$ (l die lineare Dimension des Körpers) ist die Strömung um den schwingenden Körper eine Potentialströmung.



$u \sim wa$

Projektionsrichtung der Glieder in der Euler-Gleichung abschätzen:

$z(t) = a \cos \omega t$
 $u(t) = -\omega a \sin \omega t$
 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega^2 a \cos \omega t$
 $|u_{max}| = \omega a$
 $|\frac{\partial u}{\partial t}|_{max} = \omega^2 a$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \phi$

\vec{v} (Strömungsgeschwindigkeit) wird durch die Schwingungen des Körpers (mit \vec{u}) in Abständen der Projektionsrichtung l geändert

\Rightarrow Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{u}{l}$

In der Nähe des Körpers wird die Größe von v durch u bestimmt,

$v \sim u \Rightarrow |(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}| \sim \frac{u^2}{l}$

wegen $\omega \sim \frac{u}{a}$ ist dort mit $v \sim u$

$|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}| \sim \omega u \sim \frac{u^2}{a}$

Für kleine Schwingungen, $a \ll l \Rightarrow$

$$|(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}| \ll \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \approx -\vec{\nabla} w}$$

\Rightarrow Vernachlässigen des konvektiven Teils.

Bilde die Rotation, $\vec{\nabla} \times$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{u} = \text{const}}$$

Der zeitliche Mittelwert von \vec{u} ist $\langle \vec{u} \rangle_t = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0}$ Die Strömung einer Flüssigkeit, die kleine Schwingungen ausführt, ist in erster Näherung eine Potentialströmung.

Eigenschaften von Potentialströmungen:

1) Die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve ist 0:

$$\Gamma = \oint_k \vec{u} \cdot d\vec{\ell} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes}}}{=} \int_{\vec{F}} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{F} = 0$$

\Rightarrow \nexists geschlossene Stromlinien in einer Potentialströmung (denn die Richtung der Stromlinie stimmt mit der Richtung der Geschwindigkeit überein, und die Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve wäre $\neq 0$)

2. Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ kann bei Potentialströmungen \vec{v} als Gradient eines Skalar- oder Geschwindigkeitspotential ϕ dargestellt werden:

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$$

so dass die Euler-Gleichung für die Geschwindigkeit

$$-\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} v^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = -\vec{\nabla} w \quad \text{wird}$$

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w \right) = 0 \Rightarrow \text{Potentialgleichung.}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w = f(t)}$, mit einer beliebigen Zeitfunktion $f(t)$; mit $w = \frac{p}{\rho}$ verknüpft

als erstes Integral der Bewegungsgleichungen für eine Potentialströmung.

die Gleichung Geschwindigkeit und Druck.

Für eine stationäre Strömung ist ϕ zeitunabhängig,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{v^2}{2} + w = \text{const}}$, Bernoulli-Gleichung folgt direkt für stationäre Strömungen

beachte: für eine Potentialströmung ist die Konstante in der BG im gesamten Fluidvolumen konstant, für eine beliebige Strömung nur längs jeder einzelnen Stromlinie.

2.9 Inkompressible Fluide

Ein Fluid ist inkompressibel für

$$\boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1} : \text{ keine merkliche Kompression oder Ausdehnung während der Bewegung}$$

Notwendige Bedingungen für Inkompressibilität:

Abschätzung der Dichteänderung $\Delta \rho$ bei Druckänderung um Δp (adiabatisch)

$$\Delta \rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{s=\text{const}} \Delta p$$

Nach Bernoulli sind die Druckschwankungen in einer stationär strömenden Flüssigkeit von der Störbewegung

$$\Delta p \sim \rho v^2$$

ferner ist mit der Schallgeschwindigkeit c im Fluid

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2$$

$$\Rightarrow \Delta \rho \sim \frac{\rho v^2}{c^2}, \quad \boxed{\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1}$$

$\Rightarrow \boxed{v \ll c}$ Notwendige Bedingung für Inkompressibilität. Zweite stationäre Strömung ist das auch hinreichend.

Für nicht stationäre Strömungen muss eine weitere Bedingung erfüllt sein:

Die Zeit $\frac{s}{c}$, in der ein Schallsignal die Entfernung s zurücklegt, muss klein sein gegenüber der Zeit τ , in der sich die Strömung merklich ändert - dann lässt sich die Ausbreitung von Wechselwirkungen in der Flüssigkeit als momentaner Prozess beschreiben:

$$\boxed{\frac{s}{c} \ll \tau}$$

[Herleitung : EG ohne Konvektions-term:

$$\left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right| = \left| \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{u}{\tau} \sim \frac{\Delta p}{s \cdot \rho} \Rightarrow \Delta p \sim \frac{s}{\tau} \rho \cdot u$$

zugehörige Änderung von ρ mit $\Delta \rho \sim \frac{\Delta p}{c^2}$:

$$\Delta \rho \sim \frac{s \cdot \rho \cdot u}{\tau \cdot c^2}$$

Kontinuitätsgleichung:

vergleiche $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ mit $\rho \vec{\nabla} \vec{u} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}$ vernachlässigbar ($\rho \sim \text{const}$)

$$\text{für } \frac{\Delta \rho}{\rho} \ll \rho \frac{u}{s}, \text{ oder } \frac{\Delta \rho}{\rho} \sim \frac{s \cdot u}{\tau c^2} \ll \tau \cdot \frac{u}{s} :$$

erfüllt für $\tau \gg \frac{s}{c}$, v.o.]

Für $\rho = \text{const}$ ändert die Eulersche Gleichung ihre Gestalt nicht; man kann jedoch ρ in den Gradienten ziehen:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \vec{g}$$

Die Kontinuitätsgleichung wird für $\rho = \text{const}$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Da die Dichte bekannt (const.) ist, wählt man als System von Grundgleichungen am besten solche, die nur Geschwindigkeiten enthalten; Euler:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{v} = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

Da in der Euler-Fl. $\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$ statt ∇w steht, läßt sich die Bernoulli-Fl. angeben in der Form

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}$$

und die Energierhomodiele wird

$$\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) = \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right).$$

Für die Potentialströmung eines inkompressiblen Fluids werden die Gleichungen besonders einfach:

Mit $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ ist die EG (p. 36) identisch erfüllt

Die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ wird mit

$$\vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi = 0}$$

Laplace-Gleichung für das Geschwindigkeitspotential ϕ

(auch diese Gl. hatte L. Euler als erster eingeführt; sie enthält die Zeit nicht explizit, sondern nur über die Randbedingungen).

Mit den Randbedingungen an den Kontaktflächen Fluid-Rand:

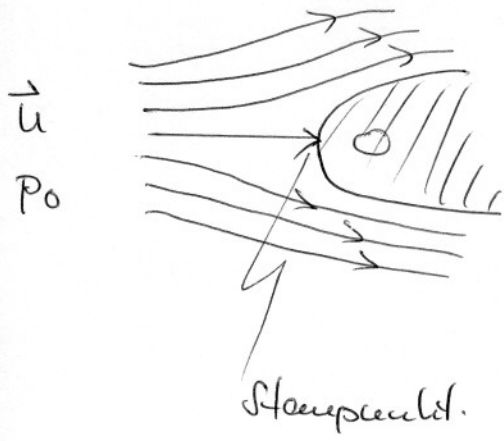
feste Wand: $v_{\perp} = 0$

bewegl. Wand: $v_{\perp} =$ Projektion der Wandgeschwindigkeit auf die Normalenrichtung

und es ist $v_{\perp} = \frac{\partial \phi}{\partial e_{\perp}} =$ vorgegebene Funktion der Koordinaten und der Zeit ($e_{\perp} =$ Normalenrichtung)

d.h. die Randbedingungen enthalten nur die Geschwindigkeit in Normalenrichtung

stationäre Strömung eines inkompressiblen Fluids; Stromfunktion



Wegen Bernoulli:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

ist der Druck bei einer stationären Strömung eines inkompressiblen Fluids (ohne Schwerkraft) dort am größten, wo die Geschwindigkeit 0 wird.

Dieser Punkt heißt Staupunkt.

Sei \vec{u} die Geschwindigkeit des Fluids im Unendlichen
 p_0 der Druck " " " "

⇒ Druck im Staupunkt:

$$p_{\text{max}} = p_0 + \rho \frac{u^2}{2}$$

Bei zweidimensionaler (ebener) Strömung (\vec{v} hängt nur von zwei Koordinaten ab) können die Geschwindigkeitskomponenten als Ableitung einer Stromfunktion $\psi(x,y)$ geschrieben werden:

$$\text{u.G.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow v_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad : \text{ die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt.}$$

Die Gleichung für die Stromfunktion ψ folgt durch Einsetzen in die Euler-Gleichung für die Perpendikularität,

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})] ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z=0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi$$

$$= -\vec{e}_x \frac{\partial v_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial v_x}{\partial z} + \vec{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

In 2D: $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{e}_z \Delta \psi$

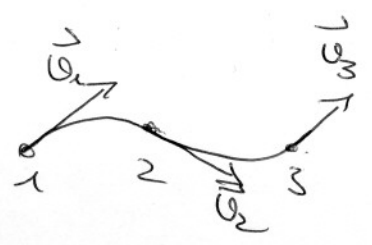
$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

Aus der Stromfunktion lässt sich die Form der Stromlinien für eine stationäre Strömung unmittelbar bestimmen:

DGL für die Stromlinien bei ebener Strömung (kein v_z):

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0$$

die Richtung der Tangente an eine Stromlinie stimmt in jedem Punkt mit der Richtung der Stromlinie überein.

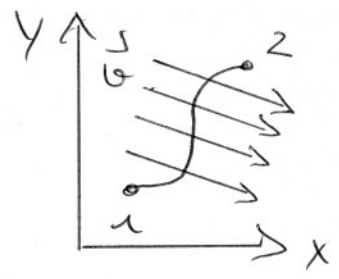


$v_x(\psi), v_y(\psi)$ einsetzen \Rightarrow

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi = \text{const.}}$$

d.h. die Stromlinien bilden eine Kurvenschar, die man erhält, wenn man die Stromfunktion $\psi(x,y)$ gleich einer beliebigen Konstanten setzt.

In der $x-y$ -Ebene ist der Flussstrom Q durch eine Kurve zwischen 2 Punkten unabhängig von der Form der Kurve durch die Differenz der Werte der Stromfunktion in diesen Punkten bestimmt.



Mit v_{\perp} = Projektion von \vec{v} auf die Normale der Kurve in einem gegebenen Punkt,

$$Q = \rho \int_1^2 v_{\perp} dl = \rho \int_1^2 (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_1^2 d\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \rho (\psi_2 - \psi_1)}$$

Die Funktionentheorie liefert leistungsfähige Methoden zur Berechnung der Potentialströmung um verschiedenartige Profile.

Grundlage dieser Anwendungen:

Das Potential und die Stromfunktion hängen mit den Geschwindigkeitskomponenten wie folgt zusammen:

$$v_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad v_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} = + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Die Beziehungen zwischen den Ableitungen der Funktionen ϕ und ψ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

stimmen mit den Cauchy-Riemannschen Gln überein

Sie sind Bedingung dafür, dass das komplexe Potential

$$w = \phi + i\psi$$

das sich aus Geschwindigkeitspotential (Realteil) und Stromfunktion (Imaginärteil) zusammensetzt, eine analytische Funktion des komplexen Arguments $z = x + iy$ ist, bzw. dass $w(z)$ in jedem Punkt z differenzierbar ist als

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i v_y \equiv \text{komplexe Geschwindigkeit,}$$

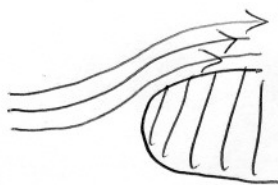
mit Betrag

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v$$

Das Argument der komplexen Geschwindigkeit $w' \equiv \frac{dw}{dz}$ ist der Winkel θ zwischen der Geschwindigkeit und der x -Richtung,

$$w' = \frac{dw}{dz} = v e^{-i\theta}$$

An der Oberfläche eines unströmten festen Kontur muss die Geschwindigkeit tangential gerichtet sein.



Die Kontur muss mit einer Stromlinie übereinstimmen, auf ihr muss $\psi = \text{const}$ sein; die Kontur kann $\sigma \delta A = 0$ gesetzt werden.

Für eine vorgegebene Kontur wird das Strömungsproblem so auf die Bestimmung einer analytischen Funktion $w(z)$ zurückgeführt, die auf dieser Kontur reelle Werte annimmt.

Das Integral über eine analytische Funktion längs eines (beliebigen) geschlossenen Weges C ist gleich der mit $2\pi i$ multiplizierten Summe der Residuen der einfachen Pole innerhalb von C

$$\oint_C \frac{dw}{dz} dz = \oint_C w' dz = 2\pi i \sum_k A_k,$$

A_k = Residuen der komplexen Geschwindigkeit

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \oint_C w' dz &= \oint_C (u_x - i v_y)(dx + i dy) = \\ &= \underbrace{\oint_C (u_x dx + v_y dy)}_{\Gamma} + i \oint_C (u_x dy - v_y dx) \end{aligned}$$

Der Realteil ist die Zirkulation Γ längs der Kurve C .

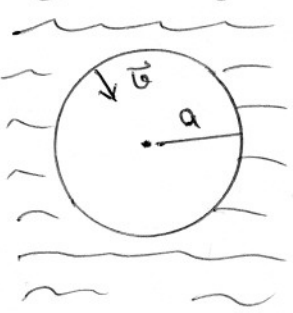
Der Imaginärteil ρ gibt den Flüssigkeitsstrom durch die Kurve C an, v.S. 40. Sind innerhalb der Kurve keine Flüssigkeitsquellen, ist dieser Strom $= 0 \Rightarrow$

$$\Gamma = 2\pi i \sum_k A_k$$

alle Residuen A_k sind rein imaginär, so dass die Zirkulation Γ reelle Werte annimmt.

Die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen entspricht demnach der zweidimensionalen Potentialtheorie der Hydrodynamik.

zu: Beispiel inkompressible Fluide: (Rayleigh 1917) Lösung:



Eine inkompressible Flüssigkeit füllt den Raum; ein kugelförmiges Volumen mit Radius a wird entfernt. Nach welcher Zeit ist der Hohlraum mit Flüssigkeit gefüllt?

Die Strömung in den Hohlraum ist kugelsymmetrisch. Für die radiale Geschwindigkeit gilt die Eulersche Gleichung (EG)

$$v_r \equiv v < 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} p_r \equiv \frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}$$

KG für inkompressible Fluide: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 v_r = 0$

$\Rightarrow r^2 v = F(t)$, beliebige Funktion der Zeit ($\frac{\partial v}{\partial r} = 0$)

dh. das Flüssigkeitsvolumen, das durch eine Kugel mit beliebigem Radius fließt, hängt wegen der Inkompressibilität nicht vom Radius ab.

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{F'(t)}{r^2}$ aus KG; in EG einsetzen:

$$\frac{F'(t)}{r^2} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad \left| \int dr \right. \quad \begin{array}{l} R(t) \leq a, \text{ a Radius des} \\ \text{Hohlraumes} \\ \infty \end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{F'(t)}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad \text{mit } V = \frac{dR(t)}{dt}$$

V = Änderungsgeschwindigkeit
des Hohlraum-Radius

p_0 = Druck bei $R \rightarrow \infty$

(Die Geschwindigkeit des Fluids bei ∞ und der Druck auf die Oberfläche des Hohlraumes sei = 0)

Mit $r^2 = F(t)$ für Punkte auf der Oberfläche
des Hohlraumes gilt

$$R^2(t) V(t) = F(t)$$

$$\Rightarrow F'(t) = 2R \underbrace{R'}_V V + R^2 \frac{dV}{dt} = 2RV^2 + R^2 \frac{dV}{dt} \quad \text{in EG einsetzen}$$

$$-\frac{2RV^2}{R} - R \frac{dV}{dR} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

$$-\frac{3}{2} V^2 - R \frac{dV}{dR} \underbrace{\frac{dR}{dt}}_V = \frac{p_0}{\rho}$$

$$-\frac{3}{2} V^2 - \frac{R}{2} \frac{dV^2}{dR} = \frac{p_0}{\rho}$$

Trennung der Variablen, integrieren mit
der Anfangsbedingung $V=0$ für $R=a$

$$V = \frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2p_0}{3\rho} \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right)}$$

$$\frac{dR}{\dots} = dt$$

Daraus die Zeit, in der der Hohlraum gefüllt

wird: $\int_0^t dt$; $\int_a^0 dR = -\int_0^a dR \Rightarrow$

$$t = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1}} = \dots$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2 \rho \pi}{2p_0}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(1/3)} = \underline{0.915 a \sqrt{\frac{\rho}{p_0}}}$$

Für $a = 0.1 \text{ m}$, $p_0 = 1000 \text{ hPa} = 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$

und $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{10^{-6} \text{ m}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

wird $t \approx 0.915 \cdot 10^{-2} \text{ s} \approx \underline{9 \text{ ms}}$

Note $t \propto a, \sqrt{\rho}, \frac{1}{\sqrt{p_0}}$

2.10 Wellen

Wasserwellen sind komplizierter als akustische oder optische Wellen: als Oberflächenwellen sind sie an die Grenze zweier Medien gebunden; akustische und optische Wellen sind dagegen Raumwellen.

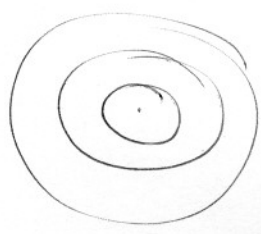
Unterschied Wirbel / Wellen:

Wirbel tragen Materie mit sich fort; bei Wellen bleiben die Flüssigkeitsteilchen im Mittel am Ort - es pflanzt sich nicht Materie, sondern Energie und Phase fort.

Unterscheidung von Wellen nach ihrer Symmetrie:

Ebene Wellen |||| => zB durch Windfront ausgelöst

Ringwellen

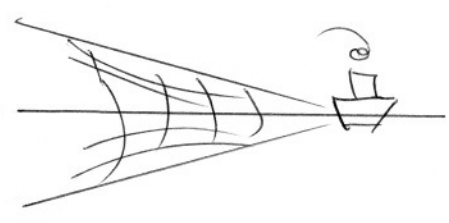


Amplituden nehmen mit der Entfernung ab; mathematisch kompliziert (Bessel-Funktionen, Fourier-Integrale)

Tiefseewellen

haben Dispersion, $v = \sqrt{\frac{g}{k}}$: $v = v(k) = v(\lambda)$
($k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

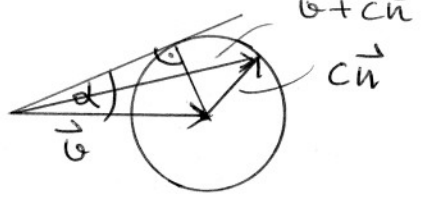
Schiffswellen sind Langswellen, die sich an den Schiffskörper anschließen; Querwellen durchsetzen sie.



Das Bezugssystem schneidet mit dem Schiff fort, ist also stativlos.

Mach-Wellen sind Stoßwellen bei Überschallströmungen

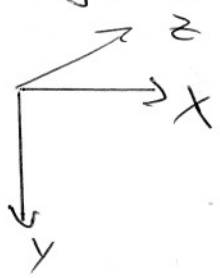
mit $v > c$



$\sin \alpha = \frac{c}{v}$, $\alpha =$ Mach'scher Winkel

Die Störung breitet sich in Strömungsrichtung innerhalb eines kegels mit Öffnungswinkel 2α aus.

Beschreibung ebener Wasserwellen (Oberflächenwellen)



- Ausbreitung in x-Richtung
- In Tiefenrichtung y wird die Welle weggedämpft

\Rightarrow Welle $A e^{i(kx - \omega t)} e^{-ky}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Kreisfrequenz

$\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit

A = Amplitude der Wasserwelle

\Rightarrow 3 Parameter A, ω , k beschreiben die Wellenausbreitung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v ist die Phasengeschwindigkeit der Welle (d.h. ihre Phase φ , $e^{i\varphi}$ schreitet mit v fort).

Der veränderliche Teil der Phase ist durch $\varphi = kx - \omega t$ gegeben; setzt man ihn konstant (\equiv Ort gleicher Phase zu verschiedenen Zeiten) folgt

$$k dx - \omega dt = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v}$$

Phasengeschwindigkeit

Für monochromatische Wellen (Wellen fester Frequenz) ist nur die Phasengeschwindigkeit von Bedeutung

Bei Überlagerung von Wellen verschiedener Frequenz (na benachbarter Frequenz) zu einem Wellenpaket (= Wellengruppe) ist dessen Gruppengeschwindigkeit u i.a. von v verschieden.

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk}}$$

Gruppengeschwindigkeit

[wichtige phys. Größe in der Wellenmechanik: de Broglie $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$
 $\Rightarrow u = \frac{h}{(m\lambda)}$]

Nur bei dispersionslos Wellenausbreitung ($\equiv v$ ist unabhängig von λ, k) fallen Phasen- und

Gruppengeschwindigkeit zusammen, eine Wellengruppe kann ohne Formänderung fortbewegt werden

$$\omega = vk$$

$$\Rightarrow d\omega = v dk \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v \equiv u$$

im allgemeinen ist jedoch

$$d\omega = v dk + k d v =$$

$$= v dk + k \frac{dv}{dk} dk \quad [: dk, u = \frac{d\omega}{dk}; k = 2\pi\lambda^{-1}$$

$$\Rightarrow u = v + k \frac{dv}{dk}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

Es ist $\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{d\omega}{d\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda}$

$\Rightarrow k \frac{d\omega}{dk} = -\lambda \frac{d\omega}{d\lambda}$

$\Rightarrow \boxed{u = \omega - \lambda \frac{d\omega}{d\lambda}}$

allg. Zusammenhang Gruppen- / Phasengeschwindigkeit

keine Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} = 0 \Rightarrow u = \omega$

normale Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} > 0 \Rightarrow$ Gruppengesch. $u < \omega$
Phasengesch.

anomale Dispersion: $\frac{d\omega}{d\lambda} < 0 : u > \omega$

Man findet für Schwerewellen in Tiefwasser, $l \gg \lambda$

$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2\pi}}$, $\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \cdot \omega$

$\Rightarrow u = \omega - \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \omega < \omega : \text{normale Dispersion}$

Im flachen Wasser findet man ($l \ll \lambda$)

$\omega = \sqrt{g \cdot h}$: keine Dispersion

Bei Schwerewellen wird die Ausbreitung am besten über die Euler'sche Gleichung mit Geschwindigkeitspotential beschrieben, $\vec{v} = -\nabla \Phi$

$\boxed{-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} (p + \rho \Phi) = F(t)}$

Für welche Amplituden wird das quadratische Glied vernachlässigt. An der freien Oberfläche herrscht Atmosphärendruck ($p \equiv 0$). Die einzige Zeitfunktion, die periodische fortschreitende Wellen nicht stört, ist $F(t) \equiv \text{const} \equiv 0$ (oBdA)

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{u}{\rho} = - \frac{\rho \cdot g \cdot y}{\rho} = -g y$$

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g y}$$

Die Welle breitet sich wie das Geschwindigkeitspotential aus; daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen ω und λ (die Dispersion)

Ebene Kapillarwellen

Wird λ immer kleiner, ist nicht mehr die Schwere, sondern die Oberflächenspannung σ für die Wellenausbreitung maßgebend, so dass die Dispersionsverhältnisse komplett geändert werden.

Die Oberfläche ist nicht mehr wäpfefrei, sondern einem aus σ hervorgehenden Normaldruck ausgesetzt \Rightarrow

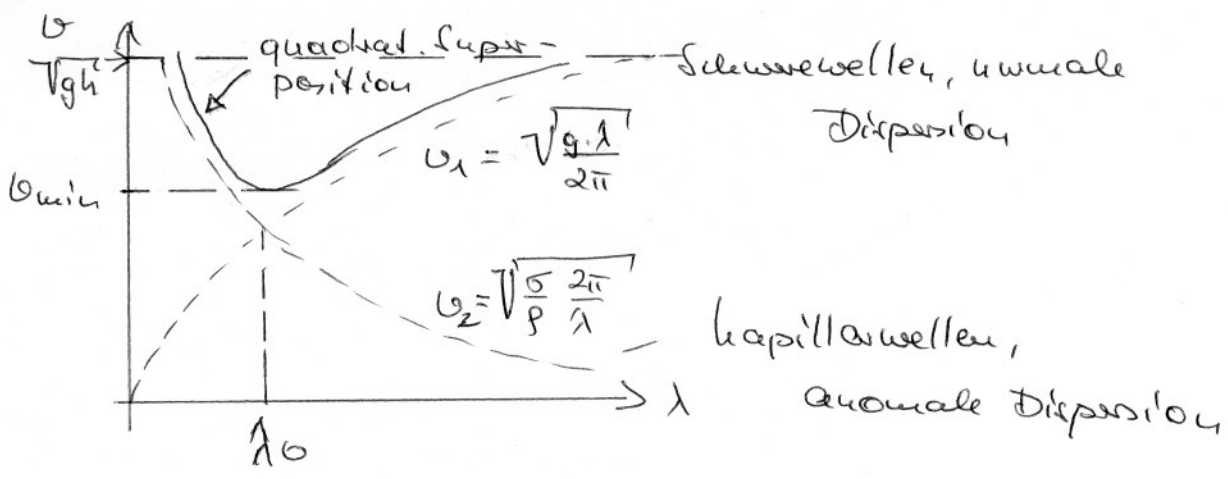
$$\boxed{-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 0}$$

Man findet für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}}}$$

d.h. sie wächst mit abnehmendem λ , umgekehrt wie bei Schwerkwellen in tiefem Wasser: anomale Dispersion

Dispersionsverhalten von Kapillar- und Schwerwellen:



Für $\lambda < \lambda_0$: die vorwärtreibende Kraft der Kapillarwellen hängt von der Krümmung des Oberflächenprofils ab;

$\lambda > \lambda_0$: die Kapillarität ist bei großen Wellenlängen unbedeutend

Schnittpunkt:

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda_0}} = \sqrt{\frac{g \cdot \lambda_0}{2\pi}}$$

Kapillar Schwere

$$\Rightarrow \lambda_0^2 = \frac{\sigma \cdot (2\pi)^2}{\rho g} \Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}}$$

$\Rightarrow v_{min}$ bei quadratischer Superposition:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad ; \quad v_{min} : v_1 = v_2 \Rightarrow$$

$$v_{min}^2 = 2v_1^2 = 2v_2^2 = 2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}$$

$$\Rightarrow v_{min} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}}$$

Numerische Werte

Wasser vs. Luft: $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} = 72 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$

alle genauesten Werte von σ erhält man bei Auswertung von Kapillarwellen durch eine Stimmgabel

mit $\rho = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$\Rightarrow \lambda_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \cdot g}} = 17.02 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx \underline{\underline{1.702 \text{ cm}}}$

$v_{\text{min}} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}} = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \sqrt{72 \cdot 9.81}} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0.231 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{23.1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}}$

= Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen mit $\lambda = \lambda_{\text{min}}$.

\Rightarrow # Wellen, die sich auf Wasser mit kleinerer Geschwindigkeit als $23 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ fortpflanzen; Wellen von größerer und kleinerer Wellenlänge als 1.7 cm laufen mit größerer Geschwindigkeit als 23 cm/s .

Lord Kelvin hat für Wellen mit $\lambda < \lambda_0$ den Namen "Ripples" vorgeschlagen; manchmal sind die Flanken breiter Scherwellen von solchen feinen Ripples überdeckt.

3. Viskose Fluide: Grundgleichungen

Bei Strömungen viskoser Fluide untersucht man die Auswirkungen von Prozessen mit Energie-dissipation auf die Strömung. Aufgrund der inneren Reibung (= Viskosität) und der Wärmekapazität wird die Strömung thermodynamisch irreversibel.

3.1 Navier-Stokes-Gleichung

Bei viskosen Fluiden bleibt die Kontinuitätsgleichung unverändert,

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0}, \text{ bzw. } \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k), \quad k=1,2,3$$

In der Eulerischen Gleichung müssen jedoch zusätzliche Terme eingeführt werden, die der Energie-dissipation

Rechnung tragen:

η Viskositätskoeffizient, $\eta > 0$

ζ Zähigkeit - " , $\zeta > 0$

Bei isotropen Fluiden genügen diese beiden skalaren Größen; bei anisotropen Fluiden werden die koefizienten Tensoren.

η und ζ sind i.a. Funktionen von Druck und Temperatur T , die nicht im ganzen Fluid gleich sein müssen. Meist können η und ζ jedoch näherungsweise konstant gesetzt werden.

Die Bewegungsgleichung wird dann

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{u} + \left(\zeta + \frac{2\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u})$$

Euler'scher Anteil

Viskosität

2. Zähigkeit \rightarrow
verschwindet für inkompressible Fluide, mit $\nabla \cdot \vec{u} = 0$.

\Rightarrow Zähigkeit inkompressible Fluide
genügen der Navier-Stokes-Gleichung (NSG)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

C.L. Navier 1827
Ableitung durch
G.G. Stokes, 1845

im Vergleich zu Euler haben wir
den Zusatz

$$\frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

mit der dynamischen Viskosität η ,

$$[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \hat{=} \text{Pa} \cdot \text{s} \quad \left(\text{Pa} \equiv \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right)$$

das Verhältnis

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \text{ mit } [\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}, \text{ heisst } \underline{\text{kinematische Viskosität}}$$

typische Werte für η, ν :

	η [Pa·s]	ν [$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$]
Luft	$1.8 \cdot 10^{-5}$	1.50
Wasser	0.001	0.10
Quecksilber	0.00156	0.012
Alkohol	0.0018	0.22
Glycerin	0.85	68

$\left. \begin{matrix} \text{Luft} \\ \text{Wasser} \\ \text{Quecksilber} \\ \text{Alkohol} \end{matrix} \right\} \cdot 10^{-5}$

Bei fester Temperatur hängt die dynamische Zähigkeit η von Gasen nicht vom Druck ab.

Da $pV = \text{const}$

\Rightarrow kinemat. Zähigkeit $\nu \propto V \propto \frac{1}{p}$.

Wie bei der Euler-Gleichung lässt sich der Druck aus der NSG eliminieren: bilde $\vec{\nabla} \times$,

verwende $(\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{\vec{\nabla} u^2}{2} - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}) + \nu \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

$\rightarrow 0$ in der Euler-Gleichung

Mit $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ ist (s. z.B. Jackson, Class. Electrodynamics, 2. Umschlagseite)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{b}) &= (\vec{b} \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \\ &= [(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \vec{\nabla}] \vec{u} - (\vec{u} \vec{\nabla}) (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \quad \begin{matrix} \downarrow = 0 \text{ wg.} \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow = 0 \text{ wg.} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \end{matrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{u}) + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \times \vec{u} - [(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \vec{\nabla}] \vec{u} = \nu \Delta (\vec{\nabla} \times \vec{u})$

NSG für das Geschwindigkeitsfeld mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

Aus einer bekannten Geschwindigkeitsverteilung findet man die Verteilung von Druck, indem man eine Gleichung vom Poisson-Typ löst, die durch Bilden der Divergenz $\vec{\nabla}$ aus der ursprünglichen NSG folgt (stets inkompressibles Fluid mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ vorausgesetzt)

$$\Rightarrow \Delta p = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial^2 v_i v_k}{\partial x_k \partial x_i}$$

Wie im Euler-Fall lässt sich die Geschwindigkeitsverteilung auch durch eine Stromfunktion $\psi(x, y)$ ausdrücken,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

so dass die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

in NSG einsetzen $\Rightarrow (\vec{\nabla})$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi = 0$$

Dazu kommen die Randbedingungen :

Zwischen der Oberfläche eines festen Körpers und dem zähen Fluid gibt es molekulare Anziehungskräfte. Sie halten die innerste Fluidschicht an der Wand fest
=> die Geschwindigkeit an der Wand (an festen Oberflächen) ist 0 :

$\vec{v} = 0$ an festen Oberflächen, d.h. normale ($v_{\perp} = 0$) und tangentele ($v_{\parallel} = 0$) Komponenten müssen verschwinden; bei idealen Fluiden war nur $v_{\perp} = 0$ gefordert.

Beachte : die Euler-Gleichungen könnten eine Randbedingung $v_{\parallel} = v_{\perp} = 0$ gar nicht erfüllen, weil die sämtlichen Ableitungen dort von erster Ordnung sind; in der NSG sind sie wegen des Viskositätsterms von zweiter Ordnung.

Bei einer bewegten Oberfläche muss \vec{v} gleich der Geschwindigkeit dieser Oberfläche sein.

3.2 Energie dissipation in einem inkompressiblen viskosen Fluid

Aus Viskosität ergibt sich Energiedissipation, d.h. Umwandlung von Energie in Wärme. Dabei wird jedoch die detaillierte molekulare Struktur des Fluids nicht berücksichtigt.

Berechnung der dissipierten Energie in einer inkompressiblen Flüssigkeit:

Gesamte kinetische Energie:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV ; \text{ lokale Zeitableitung:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_k = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

aus NSG einsetzen:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ik}^l}{\partial x_k} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v$$

mit dem Reibungstensor

$$\sigma_{ik}^l = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \text{ bei inkompressiblen Fluiden}$$

(\equiv der Teil des Impulsstromes, der nicht mit dem unmittelbaren Transport des Impulses gemeinsam mit der Masse des bewegten Fluids zusammenhängt)

⇒ ... ⇒

$$\frac{d}{dt} E_k = - \frac{\eta}{2} \int_V \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]^2 dV$$

$i, k = 1, 2, 3$

Energiedissipation in einem inkompressiblen Fluid; sie bewirkt eine Abnahme der mechanischen Energie:

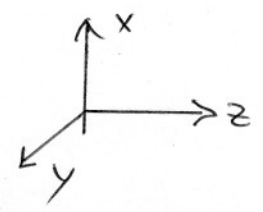
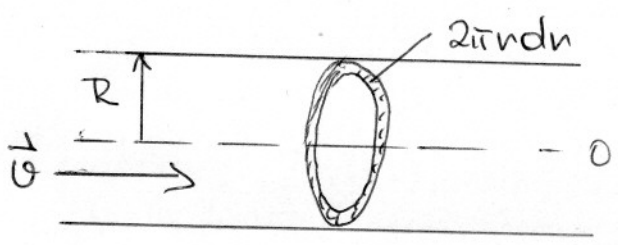
$\frac{d}{dt} E_k < 0$ (Das Integral ist wg. des quadratischen Integranden stets positiv; demnach muss der Viskositätskoeffizient $\eta > 0$ sein;

$$\frac{d}{dt} E_k \propto -\eta$$

3.3 Hagen-Poiseuillesches Gesetz

Strömung einer inkompressiblen zähen Flüssigkeit durch ein Rohr („Poiseuille-Strömung“)

$$\frac{\Delta p}{\rho} \ll 1, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$



Durchflussmenge Q :

$$Q = 2\pi r \rho \int_0^R r v dr$$

Voraus.: keine Querschnittänderung; stationäre Strömung

⇒ \vec{v} hängt nur von x und y ab. Die Kontinuitätsgleichung ist identisch erfüllt,

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y = 0.$$

Berechne das Geschwindigkeitsprofil über dem

Querschnitt:

x- und y-Komponente der NSG ergeben

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 : p \text{ bleibt über dem Rohrquerschnitt konstant}$$

Die z-Komponente folgt aus der NSG als

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

↓
0 ↓
0 : konvektives Glied vernachlässigen, lineare Näherung

$$\Rightarrow \Delta \vec{u} = \frac{\nabla p}{\eta} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \approx - \frac{\Delta p}{\eta \cdot l} \text{ mit } \Delta p = \text{Druckdifferenz an den Rohrwänden} \\ (-: \text{Druck fällt ab})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \quad l = \text{Rohrlänge}$$

u hängt nur von x, y ab

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = \text{const}}$$

d.h. die Geschwindigkeitsverteilung im Flüssigkeitsrohr wird durch eine 2dim. Gleichung vom Typ

$$\boxed{\Delta \vec{u} = \text{const}} \text{ bestimmt.}$$

mit der Randbedingung $\vec{u} = 0$ am Rohrwand als Folge der Viskosität.

In Polarkoordinaten ist

$$\vec{u}(\vec{r}) = u(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\eta \cdot l}$$

Integration \Rightarrow

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + a \ln r + b$$

Die Geschwindigkeit muss über das ganze Rohr incl. Mittelachse ($r=0!$) endlich bleiben $\Rightarrow a=0$

Bestimmung von b:

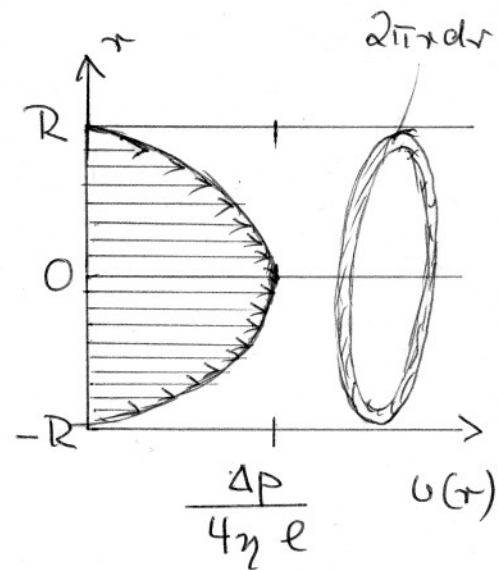
$v(r) = 0$ für $r=R$, viskose Flüssigkeit am Rand:

$$0 = -\frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 + b \Rightarrow b = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \Rightarrow$$

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta l} r^2 + \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

parabolisches Geschwindigkeitsprofil über dem Radius des Rohres.



Durchflussmenge als Funktion von R:

Durch den Weirring $2\pi r$ tritt pro Sekunde die Flüssigkeitsmenge $g \cdot v \cdot 2\pi r \, dr$

Integration über alle Weirringe:

$$Q = 2\pi g \int_0^R r \cdot v \, dr$$

0 einsetzen =>

$$Q = \frac{2\pi \rho \Delta P}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta P}{2\eta l} \left[\frac{1}{2} R^2 \cdot R^2 - \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \right] ; \text{ mit } \eta = \nu \cdot \rho$$

$$= \frac{\pi \rho \Delta P}{2\nu \rho \cdot l} \cdot \frac{1}{4} R^4$$

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8\nu l} R^4$$

unabhängig von der Dichte ρ des Fluids

bzw. $Q = \frac{\pi \Delta P \cdot \rho}{8\eta l} R^4$

mit der dynamischen Viskosität η

=> es ergibt sich das (empirisch bekannte, $Q \propto R^4$)

Hagen-Poiseuillesche Gesetz

- G. Hagen 1839
 - J. Poiseuille 1840
 - G.G. Stokes 1845, theoretische Herleitung wie oben.
- } empirisch bestimmt

Beispiel Rohrströmung von Benzol:

$\eta = 649 \mu\text{Pa}\cdot\text{s} = 649 \cdot 10^{-6} \text{Pa}\cdot\text{s}$

$\rho = 921 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Rohr mit $l = 4\text{m}$, $R = 0.2\text{m}$, $\Delta p = 10^3 \text{Pa}$

=> $Q = 2.2 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

3.4 Reynoldssche Zahl; Turbulenzkriterium

H63

Zwei sind die NSG,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{bei kompressiblen Fluiden,}$$

und $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ bei inkompressiblen Fluiden,

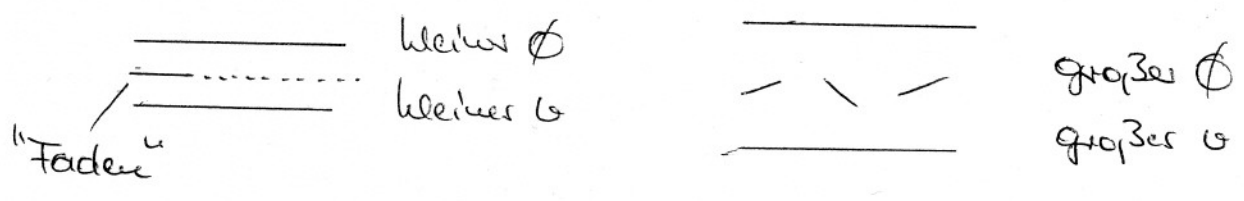
Grundlegend für die Darstellung der gesamten Flüssigkeitserscheinungen.

Jedoch ist die Frage der Stabilität einer Strömung, d.h. das Umschlagen von laminarer in turbulente (chaotische) Strömung, auf dieser Grundlage noch nicht vollständig beschreibbar.

Ein wichtiges Stabilitätskriterium liefert die Reynoldssche Zahl Re .

Sie ist ein Maß für die Stärke der Konvektion relativ zur Viskosität; das Umschlagen von laminarer in turbulente Strömung wird durch einen kritischen Wert der Reynoldsschen Zahl gekennzeichnet. Sie hat z.B. bei Rohrströmungen (Poiseuille, s.o.) einen bestimmten Wert, der nicht vom Durchmesser des Rohres abhängt.

Der englische Physiker Osborne Reynolds untersuchte im 19. Jhdht. Strömungen verschiedener Geschwindigkeiten durch Glasröhren verschiedenen Durchmessers. Anhand eines gefärbten Flüssigkeitsfadens beobachtete er das Umschlagen von laminarer in turbulente Strömung:



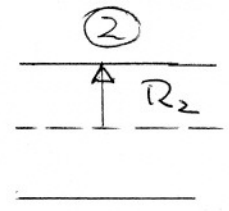
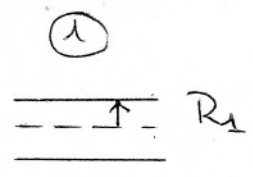
Der Faden verläuft parallel zur Röhrenachse: regelmäßig geschichtete, laminare Strömung wie bei Hagen-Poiseuille

Unregelmäßige Schlangelbewegungen des Fadens; Seitenbewegungen, die die ganze Röhre ausfüllen: turbulente Strömung

Reynolds beschrieb diese Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt eines Ähnlichkeitsgesetzes:

Vergleich zweier Anordnungen, die sich nur in den Maßeinheiten (Skalen) unterscheiden, bzw.:

2 Röhren mit unterschiedlichen Radien R_1, R_2 .
Wie ändert sich die Navier-Stokes-Gleichung beim Übergang vom System 1 zum System 2?



$R_2 = \alpha R_1 \Rightarrow \alpha$ ist die Skala für die Änderung aller Längeneinheiten, d.h.

$x_2 = \alpha x_1, y_2 = \alpha y_1, z_2 = \alpha z_1$, für zwei „korrespondierende Punkte“ in den Röhren.

Mittlere Geschwindigkeiten in ①, ②:

v_1, v_2 : $v_2 = \beta v_1$; wegen $[v] = \frac{m}{s}$ legt $\frac{\alpha}{\beta}$ die Änderung der Zeitlichkeit

$t_2 = \frac{\alpha}{\beta} t_1$. fest:

Die Röhren können mit Fluiden verschiedener Dichte und Viskosität gefüllt sein:

$\rho_2 = \gamma \rho_1$ $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$

$\Rightarrow \gamma^3 \cdot \alpha$ legt die Änderung der Masseinheit fest,

$m_2 = \gamma \alpha^3 m_1$

mit der kinematischen Zähigkeit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$,

$\nu_2 = \delta \nu_1$

sowie den Drücken in korrespondierenden Querschnitten,

$p_2 = \epsilon p_1$ (ϵ lässt sich auch durch α, β, γ ausdrücken -)

⇒ Transformation der Navier-Stokes Gl.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0$$

beim Übergang $1 \rightarrow 2$

$$\left[\frac{u}{t} \right] \quad \left[\frac{u^2}{l} \right] = \frac{u}{l^2}$$

1) Der Beschleunigungsterm ändert sich beim Übergang $1 \rightarrow 2$ wegen $R_2 = \alpha R_1$, $u_2 = \beta u_1$ um $\left[\frac{\beta^2}{\alpha} \right]$.

2) Der Zähigkeitsterm ändert sich wegen $u_2 = \beta u_1$, $\nu_2 = \delta \nu_1$ um $\left[\frac{\delta \beta}{\alpha^2} \right]$.

3) Der Druckterm wird geändert um $R_2 = \alpha R_1$, $\rho_2 = \gamma \rho_1$, $p_2 = \epsilon p_1$: $\left[\frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon}{\alpha} \right]$

Soll die NSG für beide Anordnungen ①, ② erfüllt sein, muss das Verhältnis dieser 3 Faktoren gleich 1 sein:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} : \frac{\delta \beta}{\alpha^2} : \frac{1}{\gamma} \frac{\epsilon}{\alpha} = 1 : 1 : 1$$

$$\Rightarrow \frac{\beta \alpha}{\delta} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\epsilon}{\gamma \beta^2} = 1$$

$$\cong \left[\frac{u_1 R_1}{\nu_1} = \frac{u_2 R_2}{\nu_2} \right] , \quad \left[\frac{p_1}{\rho_1 u_1^2} = \frac{p_2}{\rho_2 u_2^2} \right]$$

Ergebnis der Reynoldsschen Ähnlichkeitstheorie (1883)

In der Literatur wird meist nur die erste Gleichung als Reynoldssches Kriterium bezeichnet (obwohl die zweite für ein hinreichendes Kriterium dazugehört)

⇒ ist ① laminar, so auch ②
" ① turbulent, " " ②.

Die dadurch definierte dimensionslose Zahl ist die Reynoldssche Zahl,

$$\boxed{Re = \frac{vR}{\nu} \equiv \frac{\rho v R}{\eta} = \frac{\text{Konvektion}}{\text{Viskosität}} \sim \frac{\rho(\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{\eta \Delta \vec{\theta}}$$

wobei R -jenach Versuchsanordnung- eine räumliche Abmessung ist.

Die durch die 2. Bedingung definierte Zahl ist

$$\boxed{S = \frac{P}{\rho v^2}}$$


Der Umschlagen von laminar in turbulente Strömung ist ein für beide Röhren ① und ② ähnlicher Vorgang, der durch denselben Zahlenwert von Re gekennzeichnet wird, die kritische Reynoldssche Zahl ($R \rightarrow c$)

$$\boxed{Re_{krit} = \left(\frac{\rho v c}{\eta} \right)_{krit}}$$

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit}

⇒ Re_{krit} ist keine universelle Größe.

Der Wert von Re hängt auch von der Art des Zuflusses zum Rohr ab. Bei trumpetenförmigem

Einlauf  ist die Strömung anfangs

laminar, und bleibt es bei großem Re .

Bei "scharfem" Einlauf \Rightarrow ist die Anfangsströmung durch Seitenkomponenten gestört, und der Umschlag zur Turbulenz findet bei relativ niedrigem Re statt:

$Re_{crit} \approx 1200$, unregelmäßiger Einlauf
 $Re_{crit} \approx 20000$, gut abgerundeter " } im Plattenrohr

\Rightarrow Konstanz der kritischen Reynoldszahl nur bei Strömungen mit ähnlichen Anfangsbedingungen,

Wie kommt der Umschlag laminar / turbulent zustande?

Bisher scheint die Hagen-Poiseuille-Strömung stets eine mögliche Strömungsform zu sein - aber für

$Re > Re_{crit}$ ist sie nicht mehr stabil.

- Die Viskosität wirkt auf die Dämpfung von Seitenbewegungen hin, und begünstigt laminare Zustände

- Die Trägheit verlangt die Erhaltung der Seitenkomponenten, wirkt also zugunsten der Turbulenz

(zeigt sich in $\nu = \frac{\eta}{\rho}$: vergrößere $\eta \Rightarrow$ großer v.l., umgekehrt R zu erreichen
 vergrößere $\rho \Rightarrow$ kleiner v.l. \Rightarrow laminar
turbulenz)

Die Stabilität der laminaren Strömung lässt sich steigern, indem man Seitenbewegungen beim Einlauf durch Abrundung verhindert.

3.5 Strömungen mit kleinem Re : Stokesche Formel

469

Für $Re \ll 1$ vereinfacht sich die Navier-Stokes-Gleichung stark.

Bei stationärer Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\boxed{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}}$$

Die Reynolds-Zahl gibt i.W. das Verhältnis von konvektivem zu dissipativem Anteil wieder:

$$\frac{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}{\eta \Delta \vec{v}} \sim Re,$$

so dass für $Re \ll 1$ der konvektive Anteil vernachlässigbar ist, und die Bewegungsgleichung linear wird (daraus hatten wir die Poiseuille-Strömung berechnet),

$$\boxed{\eta \Delta \vec{v} - \nabla p = 0}$$

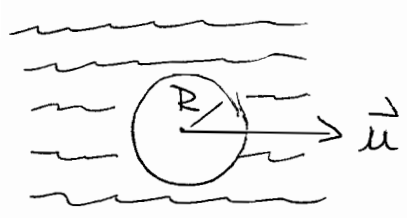
und mit der Kontinuitätsgleichung die Strömung vollständig bestimmt ist, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Durch Bilden der Rotationen folgt:

$$\boxed{\Delta (\nabla \times \vec{v}) = 0}$$

Daraus hat G.G. Stokes (1851) seine Formel für die Widerstandskraft auf eine bewegte Kugel mit Radius R in einer viskosen Flüssigkeit abgeleitet. [hier jedoch ohne Ableitung]

⇒ Stokesche Formel für die Widerstandskraft auf eine langsam im Fluid bewegte Kugel (Stömungswiderstand)



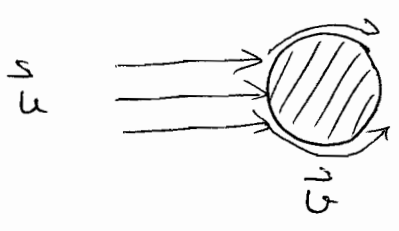
$$\vec{F} = 6\pi R \eta \vec{u}$$
 \vec{u} = Geschwindigkeit der Kugel

$F \propto R, \eta, u ; \vec{F} \parallel \vec{u}$

Für Körper anderer Form stimmt die Richtung der Widerstandskraft i.a. nicht mit derjenigen der Geschwindigkeit überein; der Widerstand hängt aber auch von u und den Abmessungen ab.

allg. Ergebnis: $F = \frac{3\eta u}{2R} \oint dA$; Kugel: $\oint dA = 4\pi R^2$
⇒ Stokes

Die Stokesche Lösung des Stömungsproblems ist äquivalent zur Umströmung einer festen Kugel in einem Flüssigkeitsstrom, der im Unendlichen die Geschwindigkeit \vec{u} hat; das \vec{v} -Feld in der Nähe der Kugel erlaubt dann die Stokesche Lösung:



Für genügend große Entfernungen von der Kugel ist die Stokesche Lösung jedoch nicht anwendbar trotz $Re \ll 1$

Dort wird $\vec{v} \approx \vec{u}$; das konvektionsglied $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ muss berücksichtigt werden. Eine Näherungslösung gelang C.W. Oseen (1910):

Oseensche Gleichung

als Verbesserung der Stokeschen Formel für große Entfernungen von der Kugel $r \gg R$:

durch Linearisierung des Konvektionsgliedes in der Form $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \rightarrow (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$, so dass

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{u}}$$

C. W. Oseen

$\vec{u}(\vec{u})!$
↑

Mit der daraus erhaltenen Geschwindigkeitsverteilung (\vec{u}) folgt eine genaue Formel für den Strömungswiderstand (gegen \vec{u}).

Als nächstes Schritt der Entwicklung des Widerstands

nach der Reynolds-Zahl $Re = \frac{u \cdot l}{\nu}$ erhält man

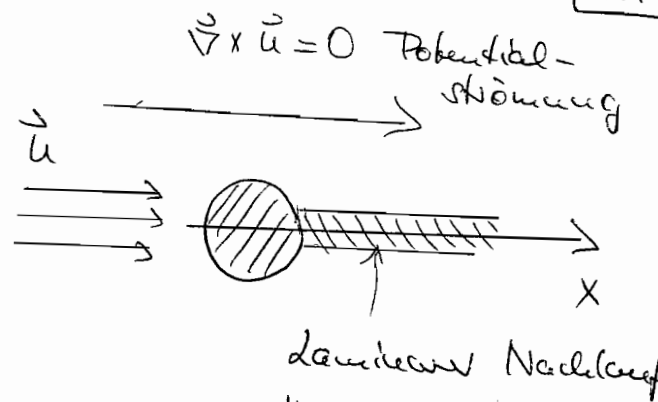
(s. H. Lamb, "Hydrodynamics", Cambridge (1924))

$$\boxed{\vec{F} = 6\pi\eta \vec{u} R \left(1 + \frac{3Re}{8\nu}\right)}$$

Für kleine Entfernungen $l \sim R$ ergibt dies nur eine sehr geringfügige Verbesserung der Stokeschen Formel, aber für $l \gg R$ wird der Unterschied merklich.

3.6 laminarer Nachlauf

Die Strömung einer zähen Flüssigkeit um einen festen Körper wird in großen Entfernungen hinter dem Körper unabhängig von seiner Gestalt.



Die "wahre" Strömungsgeschwindigkeit sei $\vec{u} + \vec{v}$, für $\vec{v} = -\vec{u}$ Stillstand, keine Strömung.

Für große Entfernungen hinter dem Körper ist \vec{v} nur im schmalen Band des laminaren Nachlaufs von 0 verschieden.

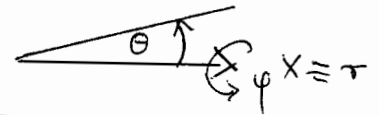
Außer im Nachlauf kann die Strömung überall als Potentialströmung angesehen werden ($\nabla \times \vec{u} = 0$) (wie bei einer idealen Flüssigkeit), da der Einfluss von η auf Stromlinien, die in genügend großer Entfernung am Körper vorbeigehen, unbedeutend ist: die Viskosität η wirkt nur am unströmten Körper, und im Nachlauf.

⇒ Problem: Wie hängt die Strömung im Nachlauf mit dem Körper auf dem unströmten Körper zusammen?

⇒ NSG für stationäre Strömung in Oseen'scher Näherung anwenden:

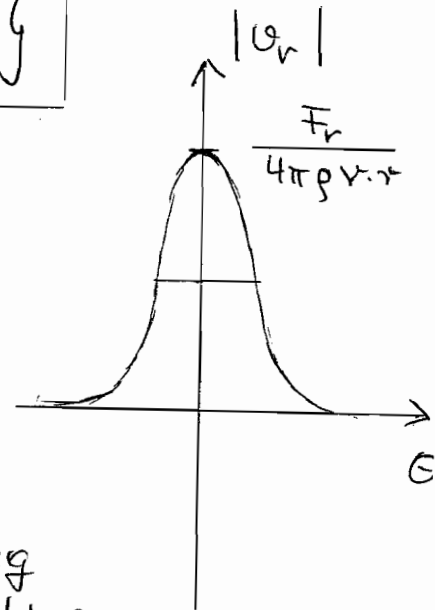
$$\boxed{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u}}$$

Die Lösung im Nachlauf ergibt in Kugelkoordinaten in genügend großer Entfernung $r \gg R$ vom Körper (Probe durch Einsetzen!)



$$v_r(\theta) = - \frac{F_r}{4\pi \rho \cdot r \cdot r} \exp\left\{ - \frac{u \cdot r \cdot \theta^2}{4\nu} \right\}$$

Das Ergebnis ist negativ, denn die Strömung ist im Nachlauf langsamer als in Abwesenheit des Körpers (wahre Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u} + \vec{v}$)



Außerhalb des Nachlaufs ist die Strömung eine reine Potentialströmung; das Potential ϕ ergibt sich durch Lösen der Laplace-Gleichung

$$\Delta \phi = 0, \quad \vec{v} = -\vec{\nabla} \phi$$

für das Geschwindigkeitspotential,

$$\phi = \frac{1}{4\pi \rho u r} \left[-F_x + F_y \cos \varphi \cot \frac{\theta}{2} \right]$$

dh. $\phi \propto \frac{1}{r}, \quad v \propto \frac{1}{r^2}$

Sofern kein Auftrieb (Gravitationsfeld) vorhanden ist, bleibt die Strömung außerhalb des Nachlaufs axialsymmetrisch.

3.7 Beispiel exakte Lösung: Rotierende Scheibe

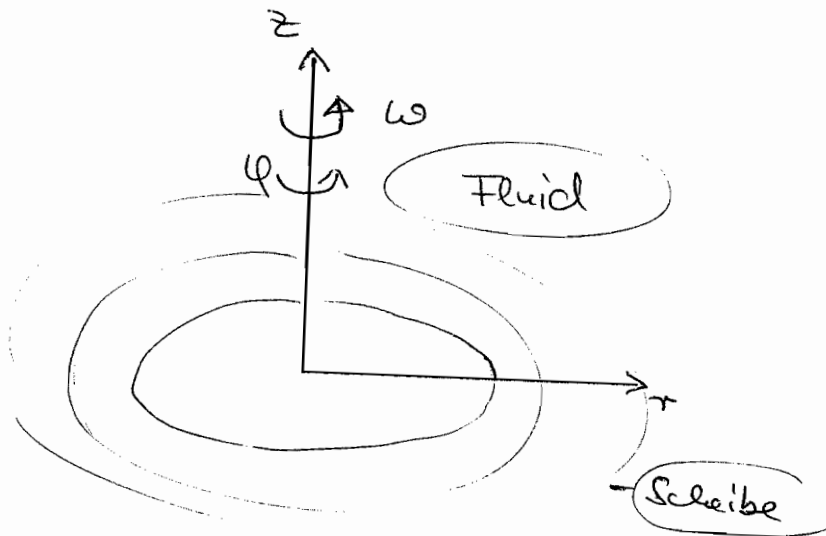
474

Exakte Lösungen von NSG und Kontinuitätsgleichung sind nur in wenigen Fällen möglich. Damit sie physikalisch interessant sind, müssen sie die Gleichungen erfüllen und stabil sein: wachsen keine Störungen zeitlich an, wird die Strömung instabil, es entsteht

Turbulenz.

Beispiel für eine stabile Lösung: Rotierende Scheibe

(Th. v. Kármán 1921)



Eine ∞ ausgedehnte Scheibe rotiert in einer viskosen Flüssigkeit gleichförmig um die z -Achse und versetzt die Flüssigkeit in Bewegung.

Randbedingungen:

Die Strömung des Fluids soll berechnet werden (Zylinderkoordin. r, φ, z)

$$z=0: v_r = 0, v_\varphi = \omega r, v_z = 0$$

$z=\infty: v_r = 0, v_\varphi = 0$; existiert $v_z \neq 0$ für $z \rightarrow \infty$ ($v_z \rightarrow -\text{const}$, die Konstante wird aus den Bewegungsgleichungen bestimmt), die Konstante wird aus den Bewegungsgleichungen bestimmt,

Das Fluid strömt radial von der Rotationsachse weg, v.a. in der Nähe der Scheibe. Zur Sicherung der Kontinuität (\equiv Massenerhaltung) in der Flüssigkeit muss ebenfalls ein konstanter vertikaler Strom aus dem Unendlichen zur Scheibe hin existieren.

Man sucht Lösungen der Bewegungsgleichung in der Form

$$v_r = r\omega F(z_1), \quad v_\varphi = r\omega G(z_1), \quad v_z = \sqrt{v \cdot \omega} H(z_1)$$

$$p = -\rho \cdot v \cdot \omega P(z_1) \quad \text{mit} \quad z_1 = \sqrt{\frac{\omega}{v}} z \quad ; \quad [\sqrt{v \cdot \omega}] = \sqrt{\frac{\omega^2}{v} \cdot \frac{1}{v}} = \frac{\omega}{v}$$

die radiale und φ -komponente der Geschwindigkeit sind prop. zum Abstand r von der Drehachse der Scheibe, während die vertikale Geschwindigkeit v_z in jeder horizontalen Ebene konstant ist.

Einsetzen in die NSG ergibt für alle 3 Komponenten (mit $' \equiv \frac{d}{dz_1}$):

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} = \sqrt{\frac{\omega}{v}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F^2 - G^2 + F'H &= F'' \\ 2FG + G'H &= G'' \\ HH' &= P' + H'' \end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ ergibt

$$\Rightarrow 2F + H' = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= 2\omega F + \sqrt{v \cdot \omega} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{v}} \cdot 1 \\ &= \underline{2\omega F + \omega H'} = 0 \end{aligned} \right. \frac{\partial z_1}{\partial z}$$

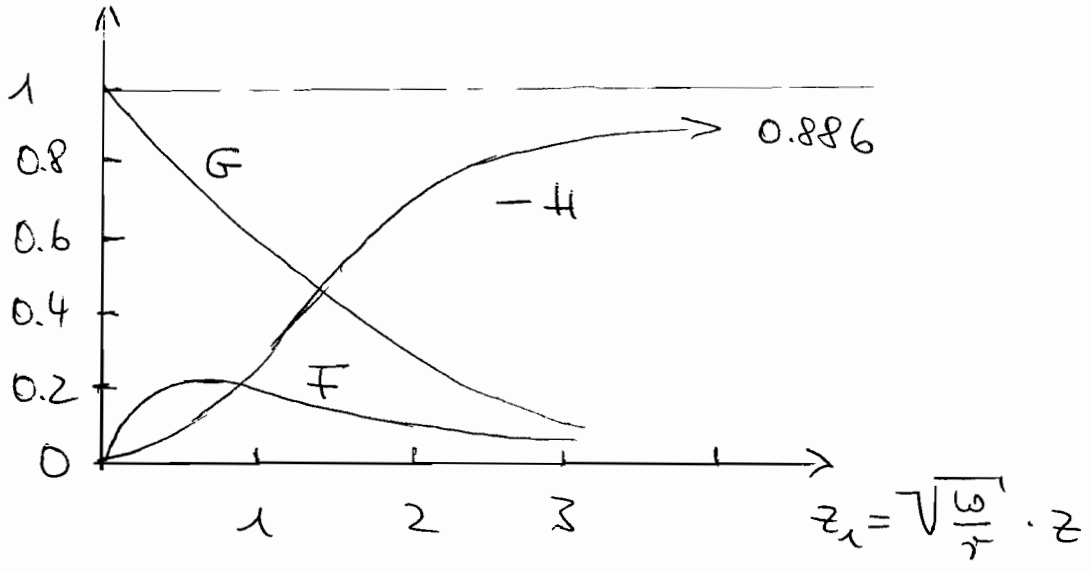
Die Randbedingungen werden

$$\begin{aligned} z_1 = 0 &: F = 0, \quad G = 1, \quad H = 0 \\ z_1 = \infty &: F = 0, \quad G = 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow eine Lösung ist auf die Integration eines Systems von 4 gewöhnlichen DGLn mit einer Veränderlichen zurückgeführt; sie kann numerisch

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitströmer aus dem Unendlichen zur Scheibe hin ist

$$G_z(\infty) = \sqrt{v \cdot \omega} H(z_1 \rightarrow \infty) = -0.886 \sqrt{v \cdot \omega}$$



Die Reibungskraft auf die Scheibe \perp zum Radialer pro Flächeneinheit ist

$$\begin{aligned} \sigma_{z\varphi} &= \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = \eta r \omega \left. \frac{\partial G(z_1)}{\partial z} \right|_{z=0} = \eta \cdot r \cdot \omega \frac{\partial z_1}{\partial z} \left. \frac{\partial G}{\partial z_1} \right|_{z_1=0} \\ &= \eta r \omega \sqrt{\frac{\omega}{v}} G'(0) = v \cdot \rho \cdot r \cdot \omega \sqrt{\frac{\omega}{v}} G'(0) \\ &= \underline{\underline{r \cdot \rho \sqrt{v \omega^3} G'(0)}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{z\varphi} \propto \rho, \sqrt{v \cdot \omega^3}}}$

Bei Vernachlässigung der Randeffekte an der Scheibe können wir für eine große, aber endliche Scheibe (Radius R) das Drehmoment der Reibungskräfte schreiben als (für 2 Seiten der Scheibe: $2 \times$)

$$M = 2 \cdot \int_0^R 2\pi r^2 \sigma_{z\varphi} dr = \pi R^4 \rho \sqrt{v \omega^3} G'(0), \text{ numerisch}$$

$M = -1.94 R^4 \rho \sqrt{v \omega^3}$

Drehmoment der Reibungskraft auf die Scheibe, $M \propto R^4, \rho, \sqrt{v, \omega}$

4. Turbulenz

4.1 Übergang zu Turbulenz, doppelte Schwelle.

Laminare Strömungen eines viskosen Fluids

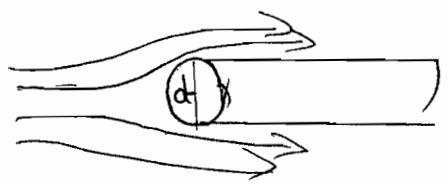
werden für große Reynoldszahlen $Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta} > Re_{krit}$

i.a. instabil gegenüber infinitesimalen Störungen:

die Störung klingt nicht mit der Zeit ab, sondern wächst an, die Strömung wird turbulent.

Für jeden Strömungstyp gibt es ein eigenes Re_{krit} ;

z.B. bei der Strömung um feste Körper:



hier ist i.a. $10 \leq Re_{krit} \leq 100$.

Im turbulenten Fall löst sich die NSG mit einer turbulenzzerzeugenden Kraft \vec{f} schreiben als

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{u} + \vec{f}$$

Analytische Lsgen im turbulenten Fall gibt es nicht, und sie wären auch wenig sinnvoll, da man jetzt an statistischen Mittelwerten interessiert ist: für die mittlere Geschwindigkeit $\langle u \rangle$, die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\langle u^2 \rangle$, die mittlere dissipierte Energie $\langle \epsilon_d \rangle$ (pro Zeit- und Masseneinheit), etc. In manchen Fällen lassen sie sich näherungsweise berechnen, insbes. bei „entwickelter

Turbulenz“ (= voll turbulente Strömung), dem ersten Beispiel ist z.B. die Rohrströmung (s. v. Weizsäcker 1949)

so fand man für die mittlere quadratische Geschwindigkeit als Funktion des Abstandes vom Wirbelzentrum (analog für die Wirbelenergie $\langle E \rangle \sim \langle \omega^2 \rangle$)

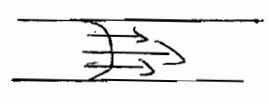
$\langle \omega^2 \rangle(r) \propto r^{2/3}$ „Wirbelverteilungsgesetz“

(aus Reynoldsversatz für selbstähnliche Strukturen) ← C.F.v. Weizsäcker, Z. Physik 124, 614 (1948) W. Heisenberg, Z. Physik 124, 628 (1948)

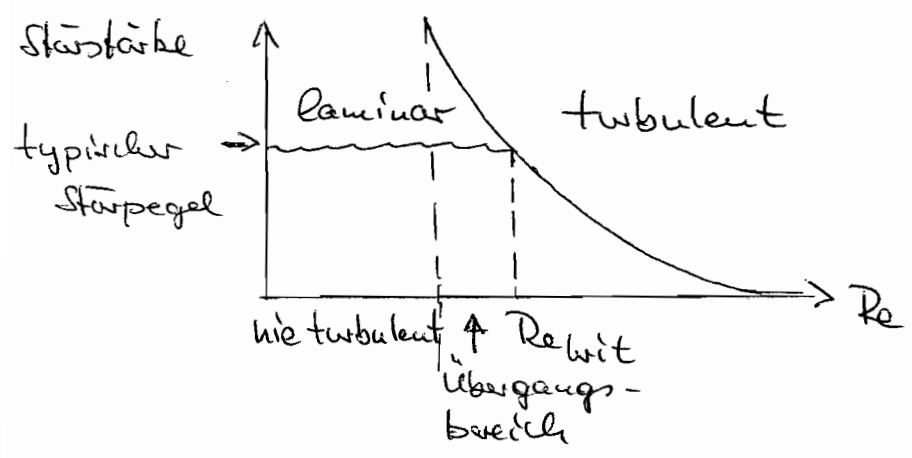
Der exakte Wert des Exponenten ist bis heute nicht berechenbar (man findet empirische ^{kleine} Abweichungen von 2/3), da auch die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen statistisch fluktuieren.

Das Einsetzen der Turbulenz bei großen Reynoldszahlen hat Landau 1944 über eine unendliche Folge von Instabilitäten und räumlich und zeitlich immer unregelmäßigere Strömungsmuster beschrieben.

Bei manchen Strömungstypen wie der Rohrströmung gibt es jedoch keine Instabilität, wohl aber Turbulenz. Sie setzt direkt und stark ein; dazu ist eine endliche Störung des laminaren Profils erforderlich (nicht wie eine infinitesimale Störung, die sich „aufschaukelt“)



⇒ hier gibt es für den Turbulenzumsatz eine doppelte Schwelle: sowohl die Reynoldszahl, als auch die Strömung müssen groß genug sein:

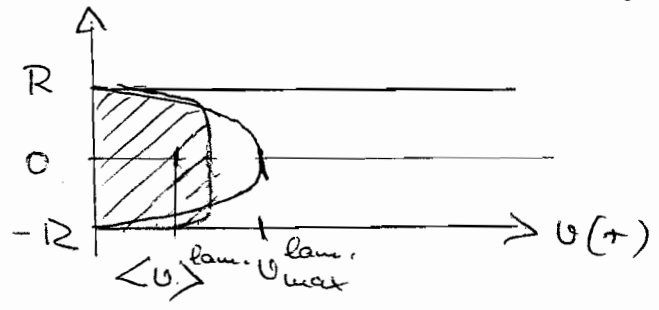


Ist die Strömung turbulent geworden, hat sie viele Freiheitsgrade und hochdimensionalen

Phasenraum (s. slide "Wasserstrahl")

Das Profil der turbulenten Strömung ist wesentlich durch die Nichtlinearität der konvektiven Terme bestimmt, während bei der laminaren Strömung die Viskosität entscheidend ist.

Beispiel Rohrströmung:



$$\left(\langle u \rangle_{\text{lam.}} = \frac{\int_0^R r u(r) dr}{\int_0^R r dr} = \frac{\Delta P}{8\eta l} R^2 \right)$$

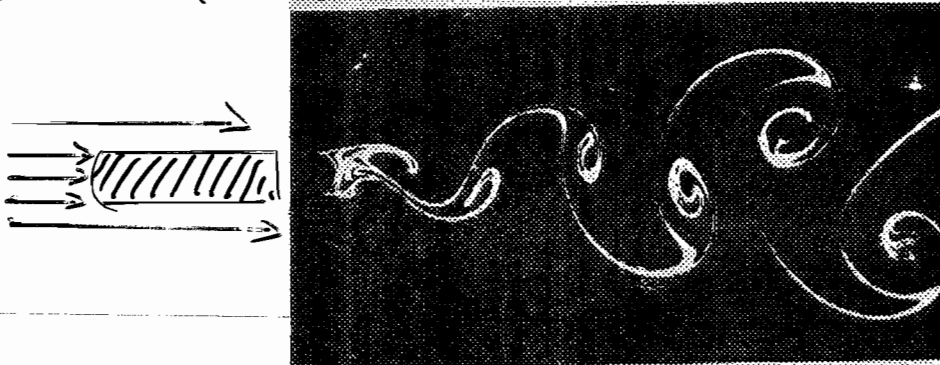
laminar: Poiseuille-Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil,

$$u(r) = \frac{\Delta P}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$u_{\text{max}}^{\text{lam.}}(r=0) = \frac{\Delta P}{4\eta l} R^2 = 2 \langle u \rangle$$

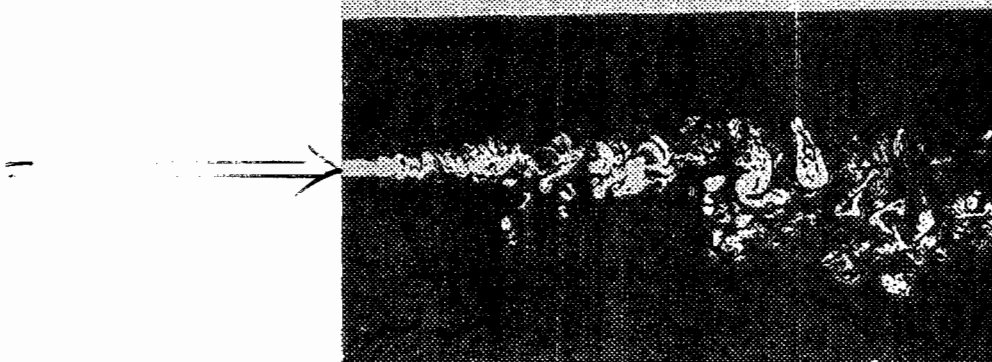
Folgen der Nichtlinearität

Ordnung u. Struktur in offenen, dissipativen Systemen
fern vom Gleichgewicht



Kármánsche
Wirbelstraße

$Re = 140$



Wasserstrahl strömt
in Wasser, und zer-
fällt turbulent

$Re \approx 2300$

Vielskaligkeit: Gleichartige Muster bilden sich in
verschiedenen Größen ineinander-
geschachtelt aus.

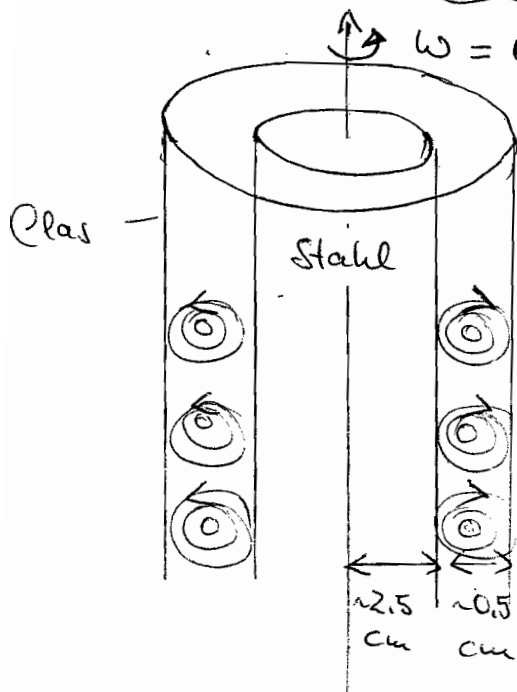
Im turbulenten Fall muss die zeitliche gemittelte Geschwindigkeit betrachtet werden; die individuelle Fluidteilchen-Geschwindigkeiten variieren stark. Die Strömung hat kein parabolisches Profil mehr, es ist eher "eckig" mit einem Maximalwert für $r=0$ (in der Rohrwitte) etwas über dem Mittelwert der laminaren Strömung. Erst direkt am Rand fällt sie steil auf 0 ab, es bildet sich eine schmale Randzone aus, in der die Strömung durch Viskosität dominiert, und fast laminar ist.

Ohne makroskopische Störung setzt Turbulenz über infinitesimale Instabilitäten ein:

4.2 Turbulenzeinsetz über Instabilität

dazu zwei Beispiele:

a) Taylor-Couette-Instabilität (1923)



Wasserströmung im Spalt zwischen einem rotierenden Innenzylinder und einem fest stehenden, konzentrischen Außenzylinder.

Bei langsam Drehung ist sie laminar, bei schneller Drehung gibt es regelmäßige Schlangenumwickelungen, bei sehr schneller Drehung wird sie stark turbulent.

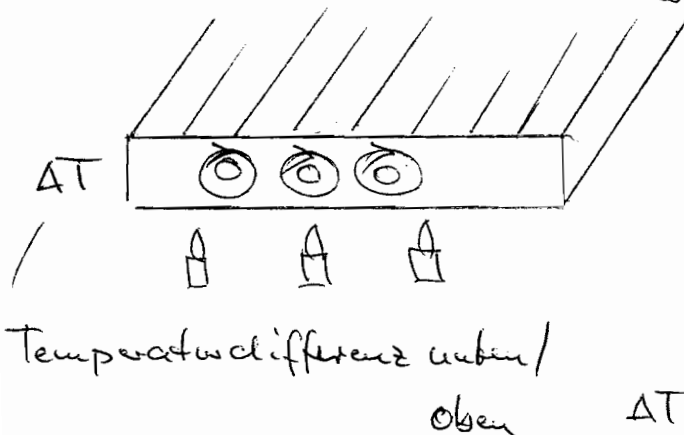
⇒ Die viskose Flüssigkeit haftet am rotierenden inneren, und am ruhenden äußeren Zylinder: es gibt ein Gefälle der axialen Geschwindigkeit $u_p(r)$ von innen nach außen, und infolgedessen ein Gefälle der Zentrifugalkräfte. Wird es hinreichend groß, kommt es zu einer Zentrifugalinstabilität. (Eine zusätzliche ^(molek.) Störung gibt es leicht nicht).

Dreht sich auch der äußere Zylinder, sollte die Strömung laminar bleiben, weil $u_p(r)$ mit r anwächst, so dass auch die Druckkraft anwächst und infinitesimale Störungen zurückweibt.

Jedoch: bei hinreichend großem ω wird die Strömung dennoch turbulent; es muss also auch hier eine weitere Ursache geben.

b) Rayleigh-Bénard-Zelle
(1916) (1920)

als weiteres Beispiel für hydrodynamische Instabilität: der Auftrieb durch Wärmeausbreitung resultiert in Konvektionssäulen, dann in Turbulenz:



Eine Flüssigkeitsschicht im Schwerfeld \vec{g} wird von unten um ΔT (einige Grad) erwärmt

- ΔT klein: die molekulare Leitfähigkeit schafft einen Wärmetransport
- ΔT mittel: Ausbildung regelmäßiger Konvektionssäulen
- ΔT groß: Turbulenz.

Die Konvektionsrollen sind die erste Instabilität; sie entsteht, wenn ein Paar komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzt (\rightarrow später; Hopf-Bifurkation).

Das beim Zerfall der Konvektionsrollen entstehende neue Muster ist nicht zeitunabhängig, sondern periodisch mit der Frequenz f_1 . Wird ΔT (oder ω oder Re) weiter erhöht, bleibt auch das neue Muster nicht stabil; es folgt die zweite Instabilität, anschließend gibt es zwei Frequenzen f_1, f_2 (und wegen der Nichtlinearität alle ihre Mischungen),

Bei der dritten Instabilität kommt nicht einfach eine weitere Frequenz hinzu, sondern das Spektrum wird kontinuierlich, und das Strömungsfeld zeitlich chaotisch. (D. Ruelle u. F. Takens, 1971).

[Bemerkung: Chaos und Turbulenz sind dennoch nicht synonym, da wichtige Gegenbeispiele nicht diesem Weg folgen.]

Der Ruelle-Takens-Weg ins hydrodynamische Chaos hat zahlreiche exp. Bestätigungen gefunden; es gibt dabei 3 Grundmuster für den Weg ins Chaos über Instabilitäten

- 1) Quasiperiodischer Weg: f_1, f_2 inkommensurabel
- 2) Periodenverdopplung: f_1, f_2 fest verknüpft
- 3) Intermittenz: Intermittierendes Entstehen eines neuen Musters.

Alle 3 Wege lassen sich je nach Randbed. bei Rayleigh-Bénard verwirklichen